

P. Contensou

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales  
29, avenue de la Division Leclerc, 92320 Châtillon-sous-Bagneux

RESUME

De nombreux auteurs ont étudié le vol des oiseaux. Il ne semble pas cependant qu'on ait cherché jusqu'à présent à optimiser le battement d'une voilure, c'est-à-dire à établir la loi du mouvement relatif d'une aile mobile pour remplir au prix d'une dépense minimale d'énergie, les fonctions de sustentation et de propulsion d'un corps pesant et résistant. La présente étude donne une solution complète du problème dans le cadre de certaines hypothèses simplificatrices. La comparaison des solutions trouvées avec le vol des oiseaux d'une part, le vol mécanique d'autre part, est évoquée.

I - INTRODUCTION

Nous considérons un corps pesant, que nous nommerons fuselage, de masse  $M$ , que nous nous proposons de faire voler horizontalement à vitesse  $V_0$ , à altitude donnée.  $M$  reçoit de l'air une résistance que nous notons  $K_F V_0^2$ . Nous cherchons à assurer simultanément sa sustentation et sa propulsion en provoquant un mouvement relatif cyclique d'une aile symétrique par rapport au plan de vol, susceptible de translation et de rotations respectant cette symétrie. Nous cherchons à définir ce mouvement relatif (ou "battement" de l'aile) de manière à entretenir le mouvement du fuselage en demandant au moteur, qui provoque le battement, une énergie minimale.

II - EQUATIONS DU PROBLEME (Fig. 1)

Soient  $\mu$  et  $\nu$  les composantes horizontale et verticale du centre de masse du système complet,  $x$  et  $z$  les coordonnées absolues d'un point caractéristique de l'aile ( $ox$  horizontal,  $oz$  dirigé suivant la verticale ascendante),  $V$  la vitesse aérodynamique de ce même point,  $\alpha$  la pente de la vitesse  $V$ . Nous exprimons les forces aérodynamiques sur la voilure à l'aide des coefficients habituels mais nous posons pour abrégé:

$$(1/2)\rho (S C_x / M) = K_x$$

$$(1/2)\rho (S C_z / M) = K_z$$

$K_x$  et  $K_z$  sont supposés indépendants de la vitesse, mais dépendent d'un paramètre  $\lambda$  qui fixe le point choisi sur la polaire. Bien que l'on puisse traiter sans difficulté le cas d'une polaire quelconque (à condition cependant qu'elle soit symétrique) nous adopterons pour simplifier une polaire parabolique et nous écrirons:

$$K_x = K(1 + \lambda^2), \quad K_z = \frac{2K}{\text{tg } \epsilon} \lambda$$

$K$  est le coefficient de traînée de l'aile à portance nulle,  $1/\text{tg } \epsilon$  sa finesse maximale. Celle-ci est atteinte pour  $\lambda=1$  avec  $K_x = 2K$ ,  $K_z = 2K/\text{tg } \epsilon$ .

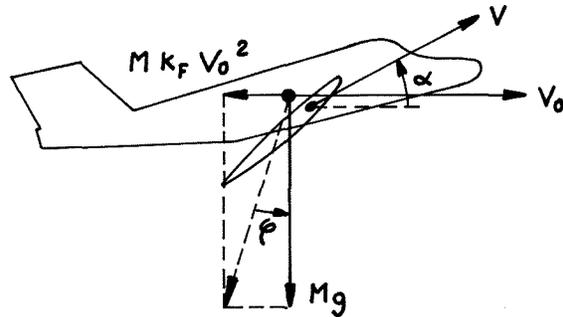


Figure 1

Il nous arrivera, pour simplifier certains calculs de supposer  $\epsilon$  petit. Nous introduirons enfin l'énergie  $M.E$  consommée par le moteur qui assure le déplacement relatif de l'aile et du fuselage.

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\ddot{x} = V \cos \alpha$$

$$\ddot{y} = V \sin \alpha$$

$$\ddot{\mu} = -K V^2 \left[ (1 + \lambda^2) \cos \alpha + \frac{2\lambda}{\text{tg } \epsilon} \sin \alpha \right] - K_F V_0^2 \quad (1)$$

$$\ddot{\nu} = K V^2 \left[ -(1 + \lambda^2) \sin \alpha + \frac{2\lambda}{\text{tg } \epsilon} \cos \alpha \right] - g$$

$$\dot{E} = K_F V_0^3 + K V^3 (1 + \lambda^2)$$

Ces équations définissent un domaine de manoeuvrabilité dans l'espace des variables d'état  $x, y, \mu, \nu, E$ , dans lequel les paramètres  $V, \alpha$  et  $\lambda$  (auxquels nous n'imposons aucune condition de continuité) jouent le rôle de commandes. Les équations du mouvement étant indépendantes de l'état, le mouvement optimal fera appel à un point fixe de la frontière du domaine, celui-ci ayant cependant subi une opération de convexisation. Celle-ci revient à choisir pendant des instants successifs (en principe infiniment petits)  $t_1$  et  $t_2$  deux jeux de paramètres  $(\alpha_1, V_1, \lambda_1), (\alpha_2, V_2, \lambda_2)$ . C'est en ceci que consistera le battement de la voilure dont nous savons, a priori, qu'il comportera deux translations uniformes successives, séparées par des discontinuités.

Pour que les jeux de valeurs précédents soient admissibles comme solutions du problème, il faut respecter certaines conditions. Formons le Hamiltonien  $H$  en introduisant les composantes du vecteur adjoint habituel  $P_x, P_y, P_\mu, P_\nu, P_E$  (nous poserons  $P_E = 1$ ).

On a, en abandonnant des termes constants :

$$\begin{aligned} \frac{H}{K} &= \frac{P_x}{K} V \cos \alpha + \frac{P_z}{K} V \sin \alpha \\ - P_{\mu} V^2 \cdot \left[ (1+\lambda^2) \cos \alpha + \frac{2\lambda}{\text{tg} \varepsilon} \sin \alpha \right] & \quad (2) \\ + P_{\nu} V^2 \cdot \left[ -(1+\lambda^2) \sin \alpha + \frac{2\lambda}{\text{tg} \varepsilon} \cos \alpha \right] & + V^3 (1+\lambda^2) \end{aligned}$$

On doit avoir :

$$\frac{\partial H}{\partial V_1} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial V_2} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = 0$$

et, en outre :

$$H(V_1, \alpha_1, \lambda_1) = H(V_2, \alpha_2, \lambda_2)$$

Pour l'un et l'autre groupe, on aura donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \frac{\partial H}{\partial V} &= \frac{P_x}{K} \cos \alpha + \frac{P_z}{K} \sin \alpha - 2 P_{\mu} V \\ \left[ (1+\lambda^2) \cos \alpha + \frac{2\lambda}{\text{tg} \varepsilon} \sin \alpha \right] &+ 2 V P_{\nu} \quad (3) \\ \left[ -(1+\lambda^2) \sin \alpha + \frac{2\lambda}{\text{tg} \varepsilon} \cos \alpha \right] &+ 3 V^2 (1+\lambda^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{KV} \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -\frac{P_x}{K} \sin \alpha + \frac{P_z}{K} \cos \alpha + P_{\mu} V \\ \left[ (1+\lambda^2) \sin \alpha - \frac{2\lambda}{\text{tg} \varepsilon} \cos \alpha \right] &- P_{\nu} V \quad (4) \\ \left[ (1+\lambda^2) \cos \alpha + \frac{2\lambda}{\text{tg} \varepsilon} \sin \alpha \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2V^2 K} \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= -P_{\mu} \left[ \lambda \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\text{tg} \varepsilon} \right] \\ + P_{\nu} \left[ -\lambda \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\text{tg} \varepsilon} \right] &+ V \lambda = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

La combinaison de (3) et de (5) fournit une relation (6) que nous substituerons à (1) :

$$\begin{aligned} \frac{P_x}{K} \cos \alpha + \frac{P_z}{K} \sin \alpha - 2V \left[ 1 - \lambda^2 \right] \\ \left[ P_{\mu} \cos \alpha + P_{\nu} \sin \alpha \right] &+ V^2 (3 - \lambda^2) = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

La comparaison des équations (2) et (3) fournit pour le Hamiltonien maximisé l'expression :

$$\frac{\partial H}{K} = \frac{P_x}{K} V \cos \alpha - \frac{P_z}{K} V \sin \alpha - V^3 (1+\lambda^2) \quad (7)$$

ou encore, en combinant avec (6) :

$$\frac{H}{K} = V^2 (1-\lambda^2) (P_{\mu} \cos \alpha + P_{\nu} \sin \alpha) - 2V^3 \quad (8)$$

Ces formules épuisent les conditions d'optimalité dans le cas général. Mais nous aurons à considérer le cas où la surface de voilure, au lieu d'être imposée, peut être choisie pour contribuer à l'optimisation.

Le coefficient K étant proportionnel à cette surface, on doit alors écrire :

$$\frac{\partial H}{\partial K} = 0$$

qui conduit à

$$\frac{H}{KV} = \frac{P_x}{K} \cos \alpha + \frac{P_z}{K} \sin \alpha \quad (9)$$

qui, comparée à (8), donne :

$$\frac{H}{K} = -V^3 (1+\lambda^2) \quad (10)$$

### III - RESOLUTION DES EQUATIONS D'OPTIMALITE

Les relations précédentes ne sont évidemment pas les seules à imposer à nos six inconnues (2 valeurs pour V,  $\alpha$ ,  $\lambda$  plus, éventuellement, la valeur de K), auxquelles s'ajoutent les inconnues auxiliaires  $P_x$ ,  $P_z$ ,  $P_{\mu}$ ,  $P_{\nu}$ . Mais il est commode de les exploiter immédiatement de manière à éliminer précisément ces inconnues auxiliaires. Nous allons montrer qu'il existe une solution du système, caractérisée par les relations suivantes entre les caractéristiques du battement :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 = V \\ \lambda_1 &= -\lambda_2 = \lambda > 0 \\ \alpha_1 &= \alpha_0 - \beta \\ \alpha_2 &= \alpha_0 + \beta \end{aligned}$$

Autrement dit, les vitesses aérodynamiques sont les mêmes pour les trajets aller et retour et les portances sont opposées. Les deux dernières relations fixent seulement les notations. Nous convenons que  $\lambda$  est positif, c'est-à-dire que nous affectons l'indice 1 au trajet pour lequel la portance est positive.

Montrons que les équations précédentes peuvent être vérifiées dans ces conditions, pour un choix convenable du vecteur adjoint.

Prenons :

$$\begin{aligned} \frac{P_x}{KV^2} &= P \cos \alpha_0 & \frac{P_z}{KV^2} &= P \sin \alpha_0 \\ \frac{P_{\mu}}{KV^2} &= Q \cos \alpha_0 & \frac{P_{\nu}}{KV^2} &= Q \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

P et Q étant de nouveaux paramètres :

$$\frac{1}{KV^2} (P_{\mu} \cos \alpha + P_{\nu} \sin \alpha) = Q \cos(\alpha - \alpha_0)$$

Cette quantité prenant la même valeur pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , l'égalité des valeurs  $H_1$  et  $H_2$ , ressort de l'expression (8) de H.

Les équations (6), (4) et (5) s'écrivent dans ces conditions, par exemple pour  $\alpha = \alpha_1$  :

$$\begin{aligned} P \cos \beta - 2(1-\lambda^2) Q \cos \beta + 3 - \lambda^2 &= 0 \\ P \sin \beta - Q(1+\lambda^2) \sin \beta - \frac{2\lambda}{\text{tg} \varepsilon} Q \cos \beta &= 0 \\ -Q \cos \beta + \frac{Q}{\lambda \text{tg} \varepsilon} \sin \beta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ces relations sont invariantes pour le changement de  $\lambda$  en  $-\lambda$  et  $\beta$  en  $-\beta$ . Elles suffisent donc à exprimer l'optimalité des deux solutions. Il reste à éliminer entre elles P et Q, ce qui se fait sans difficulté et fournit une relation entre  $\beta$  et  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} 2 \text{tg} \varepsilon \lambda (\lambda^2 + 1) \sin 2\beta + (\lambda^2 + 3) \cos 2\beta \\ + 3 (\lambda^2 - 1) = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

Si la surface doit être optimisée, la compatibilité entre l'équation (8) et l'équation (10) impose  $\lambda^2 = 1$ .

L'équation (11) se réduit alors à :

$$\text{tg } \varepsilon \text{ tg } 2\beta + 1 = 0$$

d'où :

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$$

#### IV - CONDITIONS SUPPLEMENTAIRES

Les caractéristiques du battement (définies par  $V$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta$ , et le rapport des temps  $t_1$  et  $t_2$ ) doivent encore satisfaire aux conditions suivantes :

- une condition de vitesse horizontale : Après un cycle, l'aile doit avoir suivi le mouvement moyen du fuselage, d'où :

$$V [\cos \alpha_1 t_1 + \cos \alpha_2 t_2] = V_0 (t_1 + t_2) \quad (12)$$

- une condition de vitesse verticale : L'aile doit se retrouver à la même hauteur :

$$\sin \alpha_1 t_1 + \sin \alpha_2 t_2 = 0 \quad (13)$$

- une condition de propulsion :

$$(1 + \lambda^2) [\cos \alpha_1 t_1 + \cos \alpha_2 t_2] + \frac{2\lambda}{\text{tg } \varepsilon} \cdot [t_1 \sin \alpha_1 - t_2 \sin \alpha_2] + \frac{K_F V_0^2}{K V^2} (t_1 + t_2) = 0 \quad (14)$$

- une condition de sustentation :

$$-(1 + \lambda^2) [\sin \alpha_1 t_1 + \sin \alpha_2 t_2] + \frac{2\lambda}{\text{tg } \varepsilon} \cdot [\cos \alpha_1 t_1 - \cos \alpha_2 t_2] - \frac{g}{K V^2} (t_1 + t_2) = 0 \quad (15)$$

L'équation (13) définit le rapport des temps  $t_1$  et  $t_2$ . On y satisfait en prenant :

$$t_1 = \sin \alpha_2 \quad t_2 = -\sin \alpha_1$$

Il est intéressant, d'autre part, d'introduire l'angle  $\varphi$  qui est une donnée fondamentale du problème par :

$$\text{tg } \varphi = \frac{K_F V_0^2}{g}$$

Il définit l'importance de la traînée de fuselage par rapport au poids de l'appareil. L'angle  $\varphi$  sera généralement petit.

L'équation (12) s'écrit alors :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (16)$$

La condition de propulsion devient :

$$(1 + \lambda^2) \sin (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{4\lambda}{\text{tg } \varepsilon} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \frac{g \text{tg } \varphi}{K V^2} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = 0 \quad (17)$$

et la condition de sustentation :

$$\frac{2\lambda}{\text{tg } \varepsilon} \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{g}{K V^2} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \quad (18)$$

L'élimination de  $g / K V^2$  entre (17) et (18) fournit :

$$4\lambda \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + (1 + \lambda^2) \text{tg } \varepsilon \sin (\alpha_2 - \alpha_1) + 2 \text{tg } \varphi \lambda \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

et, en introduisant  $\alpha_0$  et  $\beta$  :

$$2\lambda \cos 2\beta - 2\lambda \cos 2\alpha_0 + \text{tg } \varepsilon (1 + \lambda^2) \cdot$$

$$\sin 2\beta + 2 \text{tg } \varphi \lambda \sin \alpha_0$$

ou enfin :

$$\cos (2\alpha_0 + \varphi) = \cos \varphi \left[ \cos 2\beta + \text{tg } \varepsilon \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} \sin 2\beta \right] \quad (19)$$

La même introduction de  $\alpha_0$  et  $\beta$  transforme l'équation (18) en :

$$\frac{2\lambda}{\text{tg } \varepsilon} = \frac{g}{K V^2} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_0} \quad (20)$$

et l'équation (16) en :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta} \quad (21)$$

Si la surface de voilure est imposée, on peut traduire cette donnée par la valeur  $\lambda_0$  de  $\lambda$  qui assure la sustentation à la vitesse de vol  $V_0$  lorsque l'aile est fixe :

$$\frac{2\lambda_0}{\text{tg } \varepsilon} = \frac{g}{K V_0^2}$$

d'où :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_0} \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha_0} \quad (22)$$

Finalement, le problème étant défini par  $\text{tg } \varphi$  et  $\lambda_0$ , les équations (11), (19) et (22) serviront à définir les 3 inconnues  $\lambda$ ,  $\alpha_0$  et  $\beta$ . Ceci fait, on pourra calculer par (21) la vitesse  $V$  à partir de la vitesse de vol  $V_0$ . Un calcul purement cinématique portant sur les vitesses relatives horizontale et verticale de la pale fait ressortir que la direction du mouvement relatif (qui est un mouvement d'aller et retour) est perpendiculaire à la bissectrice des directions (absolues)  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Le mouvement se fait suivant l'angle  $\alpha_0 \pm (\pi/2)$ .

#### V - ETUDE DU VOL A SURFACE DE VOILURE ADAPTEE

Nous avons vu que ce cas est caractérisé par  $\lambda = \pm 1$ .

L'aile est utilisée au maximum de finesse.

Nous avons vu que l'équation (11) se traduit alors par :

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (23)$$

$$\cos (2\alpha_0 + \varphi) = 0$$

L'équation (19), dont le second membre s'annule, donne :

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (24)$$

On a donc :

$$\alpha_1 = -\frac{\varphi + \varepsilon}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

Il est intéressant de calculer le rendement du type de propulsion ainsi réalisé, c'est-à-dire le rapport de la puissance qu'il faudrait appliquer au même fuselage, portée par une aile fixe optimisée à la puissance effectivement dépensée.

On a :

$$\eta = \frac{K_F V_0^3 + 2 K_0 V_0^3}{K_F V_0^3 + 2 K V^3} = \frac{\frac{K_F}{2K_0} + 1}{\frac{K_F}{2K_0} + \frac{2KV^3}{2K_0 V_0^3}}$$

On a, d'après (20) :

$$\frac{2}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{g}{KV^2} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

et

$$\frac{2}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{g}{K_0 V_0^2}$$

et d'autre part :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta}$$

D'où :

$$\frac{2KV^3}{2K_0 V_0^3} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{\operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \right]}{\operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right]}$$

D'autre part :

$$\frac{K_F}{2K_0} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\eta = \frac{\sin(\varphi + \varepsilon) \cos \varepsilon}{(1 + \sin \varepsilon)(\sin \varphi + \sin \varepsilon)} \quad (25)$$

Pour les petites valeurs de  $\varphi$  qui correspondent aux cas usuels de déplacement aérien, le battement de l'aile comprend un mouvement de descente à pente négative  $(\varepsilon + \varphi)/2$  en mouvement absolu (la pente est la moitié de la pente de plané optimal du planeur rigide). Cette phase du mouvement fournit la sustentation. La remontée se fait en un temps beaucoup plus court et suivant une direction quasi verticale. Dans les axes liés au fuselage, la remontée se fait comme la descente, à peu près à 45°, mais le plan de l'aile est quasi

vertical, la vitesse relative pratiquement la vitesse de vol. C'est cette phase du mouvement que fournit la propulsion. (Fig. 2)

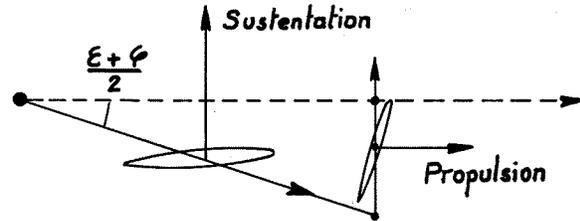


Fig. 2a - Vol à l'adaptation. Mouvement absolu.

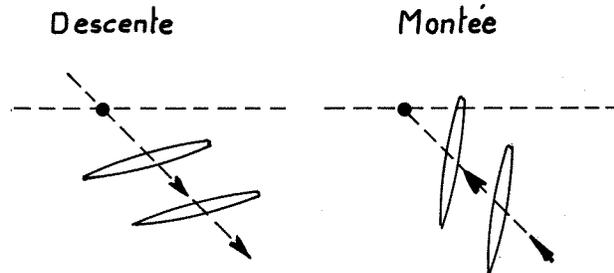


Fig. 2b - Vol à l'adaptation. Mouvement relatif.

En ce qui concerne le rendement propulsif, la formule (25) développée au premier ordre fournit la valeur :

$$\eta = 1 - \varepsilon$$

On peut aussi envisager des cas où  $\varphi$  n'est pas petit, soit parce que la traînée est effectivement forte par rapport au poids, soit parce que la sustentation est partiellement assurée par une voilure fixe s'ajoutant à l'aile mobile (cas auquel nos équations s'appliquent à condition d'adopter une valeur réduite pour  $g$ ). Au fur et à mesure que  $\varphi$  augmente, l'écart  $2\beta$  entre les directions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  reste toujours égal à  $\pi/2$ . Mais la direction moyenne  $\alpha_0$  diminue pour se rapprocher de l'axe. Les battements tendent à se symétriser. Les durées de trajet aller et retour à s'égaliser. A la limite, le cas  $\varphi = 0$  est celui où il n'y a plus de portance à assurer. L'aile battante n'assure plus qu'un rôle de propulsion. Sa théorie est celle de la godille, elle-même très voisine de celle de l'hélice réduite à son profil moyen. Les battements de l'aile sont voisins de 45° [ $\alpha = \pm [(\pi/4) + (\varepsilon/2)]$ ]. Le rendement par application de la formule (25) devient :

$$\eta = \frac{\cos^2 \varepsilon}{(1 + \sin \varepsilon)^2}$$

soit pratiquement :

$$\eta = 1 - 2\varepsilon$$

L'écart du rendement à l'unité a donc doublé progressivement lorsqu'il est passé de  $\varphi = 0$  à  $\varphi = \pi/2$ . Ce résultat établit une supériorité de principe du vol à aile battante sur le vol classique dans lequel la fonction de sustentation est assurée par une aile fixe et la fonction de propulsion par une hélice.

En supposant à celle-ci le même rendement qu'à la godille propulsive, ce qui est probablement un optimum, on voit que le second système se caractérise par une perte énergétique double. Mais l'aile battante censée obtenir cette performance est un système tout à fait irréaliste avec des inversions de vitesse par percussion, des amplitudes de mouvements angulaires et des vitesses relatives énormes. Elle ne constitue qu'une curiosité mécanique.

#### VI - L'OPTIMISATION HORS ADAPTATION

L'étude de l'optimisation hors adaptation s'impose de deux points de vue différents. D'une part on ne peut optimiser la surface de voilure que pour une vitesse de vol particulière. En dehors de cette vitesse privilégiée, on aura à traiter un problème avec surface imposée. En second lieu, si on se fixe une vitesse d'adaptation trop faible, il peut arriver que la surface optimale soit trop grande pour être acceptable. La fixation d'une dimension limite pour la voilure fait donc apparaître à basse vitesse l'intérêt d'une optimisation hors adaptation.

On peut avoir une idée approximative des phénomènes en négligeant  $\varepsilon$  et  $\varphi$  considérés comme petits, mais qu'il faudrait bien entendu réintroduire pour calculer des rendements.

L'équation (11) donne dans ces conditions :

$$\cos 2\beta = -\frac{3(\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 + 3}$$

Cette formule montre que  $\beta$  varie de  $\pi/2$  à 0 lorsque  $\lambda$  varie de  $\sqrt{3}$  à 0 en passant par  $\pi/4$  pour  $\lambda = 1$ . Au même degré d'approximation, la formule (19) donne  $\alpha_0 = \beta$ .

Les deux équations sont rigoureusement vérifiées pour :

$$\varphi = 0, \quad \beta = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \pm\sqrt{3}$$

Il s'agit encore d'un effet de godille, appliqué maintenant à la sustentation au point fixe. On peut montrer que le même système dans lequel les temps de trajet sont dissymétrisés pour s'accorder à une vitesse de translation  $V_0$  reste pratiquement optimum tant que  $\varphi$  est assez petit. Il cesse d'être possible quand la vitesse de translation atteint la valeur  $V$  imposée par la sustentation à  $\lambda = \sqrt{3}$ . Mais c'est aussi la valeur pour laquelle l'avion à voilure fixe de même surface voit passer par un minimum la puissance consommée par la sustentation (puissance correspondant à la traînée de voilure). On arrive ainsi à la notion que, si on considère la courbe de la puissance consommée par la sustentation d'un avion à aile fixe, qui passe par un minimum pour  $\lambda = \sqrt{3}$  et croît ensuite très vite pour des vitesses plus faibles, jusqu'à ce que la sustentation devienne impossible, il est possible de conserver la valeur minimale de la puissance au dessous de la vitesse du minimum, en gardant à la voilure cette vitesse et en lui faisant parcourir des trajets horizontaux alternés (Fig. 3) pour d'adapter à la vitesse plus faible du fuselage. Alors, la parenté du système avec l'hélicoptère est d'ailleurs évidente.

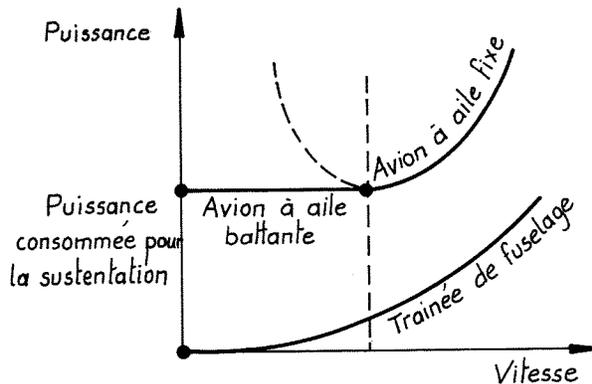


Figure 3

Si on parcourt toute la gamme des vitesses concevables pour le mobile, on observera donc pour le battement optimum un mouvement horizontal de la pale dans le sens aller, suivi d'un retour dans une direction d'abord proche de l'horizontale arrière puis passant progressivement à la verticale. C'est seulement pour les très grandes vitesses ( $\varphi$  voisin de  $\pi/2$ ) que l'on verra le battement se symétriser.

#### VII - CONCLUSION

Nous avons pu donner une théorie complète du battement optimum de l'aile, poussée jusqu'au bout dans aucune restriction sur les valeurs des paramètres dans le cas où l'optimisation s'étend à la surface de la voilure. Dans le cas où cette surface est imposée nous avons indiqué le sens des phénomènes et apporté les bases d'une étude plus complète.

On est amené évidemment à se demander dans quelle mesure la solution trouvée se rapproche réellement des formes de vol effectivement utilisées par l'oiseau ou par l'homme.

Quelques unes des caractéristiques que nous avons trouvées pour le vol adapté à des valeurs moyennes du paramètre  $\varphi$  se rapprochent de celles qui ont été observées pour les oiseaux : mouvement de l'aile descendant vers l'avant et remontant vers l'arrière, remontée plus rapide que la descente. En revanche, il semble peu probable que la remontée soit propulsive et que l'aile y soit attaquée par l'extrados. Il est vrai que l'aile de l'oiseau, avec ses articulations compliquées est très éloignée d'une aile rigide en translation.

En ce qui concerne le vol humain, la machine existante se rapprochant le plus de l'avion à aile battante est évidemment l'hélicoptère et l'évolution générale de la loi du battement avec sa direction de mouvement relatif évoluant progressivement de l'horizontale à la verticale, évoque le rotor du convertibles dont l'axe bascule en fonction de la vitesse de vol.

L'analogie est particulièrement valable pour les deux positions extrêmes, où une symétrie de révolution rend tout indiquée la substitution d'un mouvement de rotation à un va-et-vient. Dans les situations intermédiaires, la principale pénalisation apportée par le rotor est d'imposer l'égalité des vitesses relatives de la pale avançante et de la pale reculante, alors que l'optimisation appelle

l'égalité des vitesses absolues. La situation est particulièrement grave pour le vol autour de la vitesse d'adaptation, pour lequel le rapport des vitesses relatives est de l'ordre de la finesse. Cette situation, qui représente une configuration idéale dans une large gamme de vitesse pour le mobile idéal qui n'en craindrait pas les inconvénients pratiques, représente pour l'hélicoptère une situation, avec l'axe du rotor à 45°, particulièrement inconfortable et qu'il s'efforcera de franchir le plus vite possible.

L'étude du vol à aile battante ne débouchera vraisemblablement pas sur des applications directes. Les avantages que le système peut théoriquement apporter ne semblent pas à la mesure des complications qui, même résolues, se traduiraient en supplément de poids et de puissance de nature à les contrebalancer largement. Elle présente cependant l'intérêt d'établir des enveloppes de possibilités et de guider peut être les efforts de perfectionnement de systèmes qui, comme le convertible, en représentent probablement la meilleure approche.

Indiquons pour terminer que l'idée est souvent évoquée que des propriétés aérodynamiques beaucoup plus favorables de profils en régimes cycliques apporteraient un argument en faveur de l'aile battante. Il ne semble pas que de tels espoirs aient jusqu'à présent été confirmés par l'expérience.

#### NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

On trouvera une théorie de l'hélice par élément de pale par exemple dans Rebuffet - Aérodynamique expérimentale (librairie Ch. Béranger) et quelques observations déjà anciennes sur le vol des oiseaux dans H. Bouasse - Résistance des Fluides (librairie Delagrave) 1928.

On peut également consulter L. Kahn - La propulsion animale dans les fluides ; possibilités d'application au vol à vitesse variable (ATMA 1929) qui donne, sans recherche d'optimisation, une analyse intéressante des possibilités du vol à aile battante.