

**ICAS PAPER**

**No.** 72 - 17



COMPORTEMENT D'UNE COUCHE LIMITE LAMINAIRE EN PRESENCE  
D'UN GRADIENT DE PRESSION POSITIF

par

J. P. Guibergia, Maitre Assistant, Universite, et  
R. Marmey, Ingenieur, C.N.R.S.  
Institut de Mecanique des Fluides, Marseille, France

**The Eighth Congress  
of the  
International Council of the  
Aeronautical Sciences**

INTERNATIONAAL CONGRESCENTRUM RAI-AMSTERDAM, THE NETHERLANDS  
AUGUST 28 TO SEPTEMBER 2, 1972

Price: 3. Dfl.

ERRATA

ICAS Paper 72-17  
par J.P. Guibergia

page 2 colonne droite 25ème ligne, il faut lire:

$$\eta = 0 : f = f' = 0, \theta = \frac{T}{T_e} \text{ et } \eta \rightarrow \infty : f' = 0$$

page 3 colonne gauche 3ème et 4ème ligne, il faut lire:

"que des paramètres  $\beta^*$  et  $T_{eo}$ . Les solutions d'une part sont indépen-

COMPORTEMENT D'UNE COUCHE LIMITE LAMINAIRE EN PRESENCE  
D'UN GRADIENT DE PRESSION POSITIF\*

J.P. Guibergia\*\* et R. Marmey†  
Institut de Mécanique des Fluides  
de Marseille, France

Résumé

L'étude est réalisée dans le cas d'un écoulement hypersonique autour d'obstacles à pointes coniques raccordées à une jupe concave.

Les approximations faites dans les équations de Navier-Stokes sont valables pour les modèles sans pointe conique. Les résultats obtenus sont alors en accord avec l'expérience.

Pour les modèles à pointe conique, les solutions des équations de la couche limite représentent l'expérience lorsque les valeurs du paramètre de gradient de pression au raccordement cône-jupe restent petites devant celles pour lesquelles le frottement à la paroi des obstacles serait nul.

Lorsque la longueur de la génératrice  $s_j$  de la pointe conique tend vers zéro, la séparation de la couche limite ne peut jamais se produire ; pour  $s_j$  croissant, il devrait exister des valeurs de  $s_j/R > 1$  ( $R$  rayon de courbure de la méridienne) pour lesquelles il y a séparation de la couche limite.

I. Introduction

L'analyse du comportement de la couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression positif est réalisée dans le cas concret où le gradient de pression est imposé par la paroi concave, de rayon de courbure  $R$  constant, d'un modèle de révolution, à pointe vive, dont la géométrie est connue, de telle sorte que les grandeurs mécaniques de l'écoulement non visqueux peuvent être calculées. La connaissance des répartitions des paramètres extérieurs à la couche limite permet de choisir l'ordre des approximations faites dans les équations générales de Navier-Stokes. En effet, les forces d'inertie et les forces de viscosité sont du même ordre de grandeur, ce qui conduit à poser que  $\frac{\delta}{R} \sim \left( \frac{1}{\mathcal{R}_e \cdot R} \right)^{1/2}$ , le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e \cdot R$  calculé avec les grandeurs locales étant rapporté au rayon de courbure  $R$  de la méridienne de l'obstacle. Une diminution du rayon  $R$  entraîne une augmentation de l'épaisseur relative  $\frac{\delta}{R}$  et on peut penser<sup>(4 à 9)</sup> qu'il est nécessaire, dans une plus grande approximation du calcul de la couche limite, de tenir compte des termes d'ordre  $\frac{\delta}{R}$  dans les équations de Navier-Stokes. L'étude de l'écoulement non vis-

\* Cette recherche a été exécutée à l'I.M.F.M. comme partie du programme du contrat consenti à l'I.M.F.M. par la D.R.M.E.

\*\* Maître-Assistant, Université de Provence (Marseille)

† Ingénieur C.N.R.S. (Marseille)

queux montre que si une diminution du rayon de courbure entraîne une augmentation de  $(\frac{1}{\mathcal{R}_e \cdot R})^{1/2} \sim \frac{\delta}{R}$  celle-ci est relativement faible et s'atténue le long des méridiennes concaves, le nombre de Reynolds local  $\mathcal{R}_e$  rapporté à l'unité de longueur, croissant quand le rayon de courbure R diminue.

D'autre part, ce nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  local est approximativement une fonction linéaire de l'abscisse curviligne s ; en supposant que l'épaisseur relative de la couche limite  $\frac{\delta(s)}{s}$  est du même ordre de grandeur que  $(\frac{1}{\mathcal{R}_e \cdot s})^{1/2}$ , il vient

$\frac{\delta(s)}{\delta(s)_{\text{cône}}} < 1$ , où  $\delta(s)_{\text{cône}}$  est l'épaisseur de la couche limite calculée à l'abscisse s sur un cône de demi-angle d'ouverture égal au demi-angle au sommet de l'obstacle concave. Il s'en suit qu'il est inutile de retenir dans les équations de la couche limite, y compris dans le cas de rayons de courbure R petits, les termes d'ordre  $\frac{\delta}{R}$  des équations de Navier-Stokes.

La connaissance des paramètres extérieurs à la couche limite met aussi en évidence l'influence du gradient de pression transversal  $\frac{\partial p}{\partial y}$  sur l'épaisseur relative  $\frac{\delta}{R}$  de la couche limite ; on trouve :

$$\frac{\delta}{R} \sim K \left(-\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{-0,3}$$

K étant un paramètre dépendant des conditions initiales de l'écoulement gazeux et de la géométrie de l'obstacle.

## II. Instrumentation

Les mesures ont été effectuées en utilisant comme moyen d'essais, soit une soufflerie hypersonique à basse enthalpie, de diamètre 20 cm, à nombre de Mach réglable de 4 à 8, soit une soufflerie à choc réfléchi à haute enthalpie, de diamètre 35 cm, à nombre de Mach  $M_\infty = 9$  et 10.

Dans la soufflerie hypersonique, les mesures de densité de flux de chaleur con-

vectée ont été effectuées en utilisant la méthode calorimétrique, sur des modèles massifs en laiton<sup>(2)</sup> ; dans la soufflerie à choc réfléchi, on a utilisé la méthode thermométrique du film mince de platine sur des modèles en plexiglass, les films étant déposés sur des baguettes en pyrex formées et serties dans le plexiglass. Les mesures de pression ont été effectuées dans la soufflerie hypersonique en utilisant des capteurs à variations de reluctance.

## III. Equations de base

En tenant compte des remarques d'ordre général faites dans l'introduction, les équations de Navier-Stokes écrites dans un système d'axes intrinsèque ( $ds = R d\alpha$ ,  $d\beta$ ), ont été réduites à un système d'équations aux dérivées partielles admettant des solutions semblables (similitude locale). Prenant comme variables indépendantes  $\xi$  et  $\eta$ , les équations s'écrivent :

$$\beta(\theta - f'^2) + f f'' + (Cf'')' = 0 \quad (1)$$

$$\left(-\frac{C}{P} \theta'\right) + f\theta' + C \frac{u_e^2}{c_p T_e} f''^2 = 0 \quad (2)$$

où  $\theta = \frac{T}{T_e}$  et f défini par  $\psi = \sqrt{2\xi} \cdot f(\eta)$ .

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\eta = 0: f = f' = 0, \quad \theta = \frac{T_w}{T_e} \text{ et } \eta \rightarrow \infty: f' = 0$$

$$\theta = 1.$$

Ces équations ont été intégrées numériquement, les conditions à la frontière extérieure de la couche limite étant déterminées à partir de la distribution de la pression à la surface de l'obstacle calculée par la méthode des caractéristiques et par l'expression de Newton-Buseman. On a représenté dans la figure 1, la distribution du coefficient  $C_p$  à la surface de l'obstacle en fonction de  $\frac{s}{R}$  tel qu'il résulte du calcul d'une part et des mesures d'autre part.

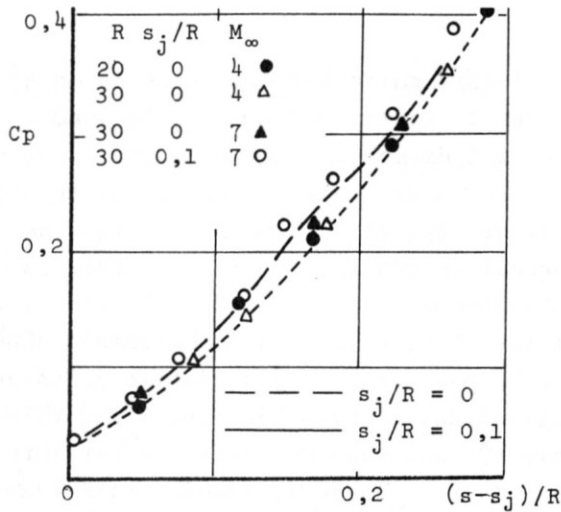


Fig.1

### III. Résultats- Discussion

Les solutions  $f''_w$  dont une famille est représentée dans la figure 2, ne dépendent que des paramètres  $\beta^*$  et  $T_{eo}$  et montrent que les solutions d'une part sont indépendantes du rayon de courbure R des modèles, du nombre de Mach et de la pression d'arrêt, d'autre part n'atteignent pas les valeurs de  $\beta^*_l$  pour lesquelles il y aurait décollement de la couche limite ( $\mu \frac{\partial u}{\partial y}_w = 0$

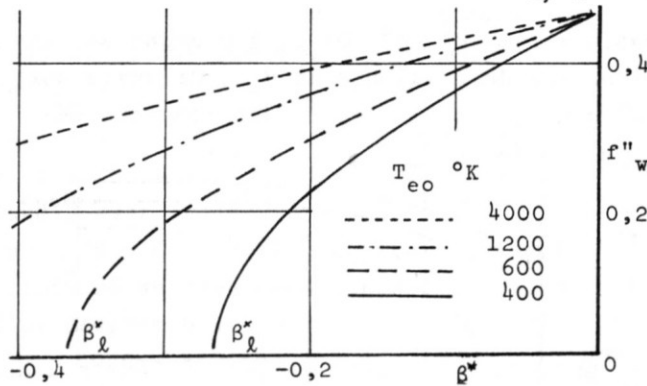


Fig.2

Dans la figure 3 on a montré l'évolution de  $\beta^*$  en fonction de l'abscisse réduite  $\frac{s}{R}$  pour différentes conditions de l'écoulement infini amont ( $M_\infty, p_\infty, T_\infty$ ) ; on constate que  $\beta^*$  ne dépend que du nombre de Mach M et que lorsque  $\frac{s}{R}$  atteint la valeur limite correspondant à l'angle  $\alpha = \sigma + \frac{s}{R}$ , voisin de l'angle limite de détachement de l'onde de choc au nez d'un cône de demi-angle d'ouverture, pour laquelle il y a blocage de la couche de choc, la valeur de

$\beta^*$  est supérieure aux valeurs de  $\beta^*_l$  qui entrainerait le décollement de la couche limite et ceci même dans le cas où  $T_{eo} = 300^\circ K$ .

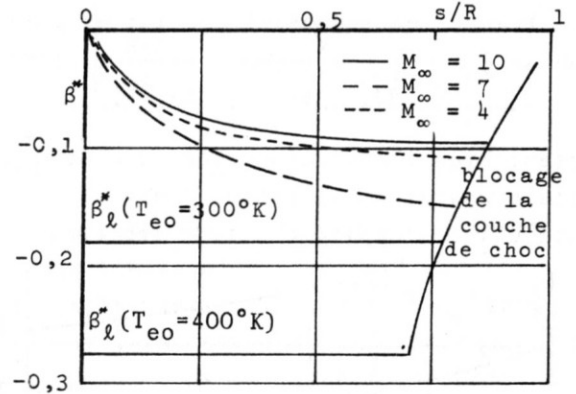


Fig.3

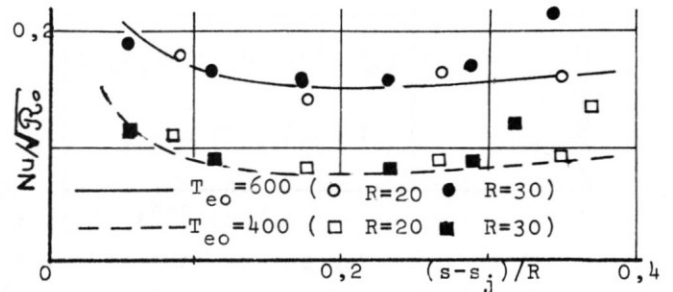


Fig.4

On a porté dans la figure 4, qui effectue la comparaison entre la théorie et l'expérience, le coefficient  $Nu/\sqrt{Re}$  en fonction de  $\frac{s}{R}$  : les courbes sont relatives aux conditions suivantes :  $M_\infty = 4$ ,  $T_\infty = 400$  et  $600^\circ K$ ,  $R = 20$  et  $30$  cm. L'accroissement rapide du coefficient mesuré à partir de  $\frac{s}{R} = 0,3$  semble déceler l'apparition de la transition de la couche limite.

En ce qui concerne l'évolution de l'épaisseur relative de la couche limite  $\frac{\delta}{R}$  la figure 5 donne un exemple, à  $R = 30$  cm,  $M_\infty = 7$ ,  $p_\infty = 25$  bars,  $T_\infty = 600^\circ K$ , de comparaison entre l'épaisseur de déplacement relative  $\frac{\delta^*}{R}$  déduite de l'intégration de la couche limite et celle de  $\frac{\delta}{R}$  déduite de la connaissance de l'écoulement extérieur. L'épaisseur relative de déplacement et par suite l'épaisseur relative de la couche limite est bien représentée quant à

l'ordre de grandeur et l'évolution, au  $\bar{1}/2$  delà d'une certaine abscisse par  $(\frac{1}{\mathcal{R}_e \cdot R})$  ; d'autre part les courbes 2 et 4 de la figure 5 tracées en supposant une loi de variation de  $\frac{\delta}{R} \sim \frac{K}{(\int_0^s \mathcal{R}_{e_s} ds)^{1/2}} \cdot \frac{s/R}{(-\frac{\partial p}{\partial y})^m}$  respectent bien l'évolution théorique de  $\frac{\delta^*}{R}$ . Cette comparaison illustrée dans un cas particulier s'applique à tous les cas.

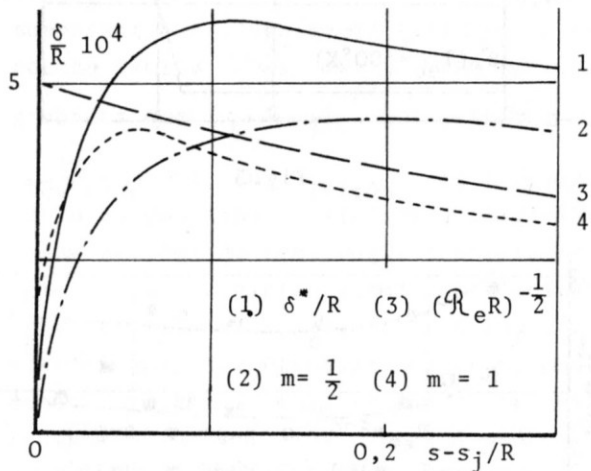


Fig.5

L'étude du comportement de la couche limite à la surface d'obstacles à méridienne concave présentant une discontinuité de courbure ne peut pas être traitée d'une manière aussi simple que dans le cas précédent. En effet les approximations de Prandtl faites dans les équations de Navier - Stokes, en ce qui concerne l'ordre de grandeur des termes contenant le gradient longitudinal de courbure  $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ , ne sont pas justifiées au point de discontinuité de courbure,  $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$  étant indéterminé.

En négligeant malgré tout les termes contenant le gradient longitudinal de courbure  $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ , on est ramené à résoudre le même système d'équations (1) ; toutefois la discontinuité de courbure des méridiennes entraîne une discontinuité du paramètre de gradient de pression longitudinal  $\beta^*$  ; il est évident que l'approximation de cette méthode de calcul est d'autant meilleure

que l'écart entre les deux valeurs de  $\beta^*$  est petit. Le type d'exemple d'obstacle concave à discontinuité de courbure qui peut être choisi est celui, bien connu, de l'obstacle de révolution à pointe conique de longueur de génératrice  $s_j$  raccordée tangentielllement à une jupe à méridienne circulaire. Dans ce cas au raccordement cône - jupe le paramètre de gradient de pression longitudinal  $\beta^*$  passe de zéro à une valeur finie  $\beta_j^*$  qui dans certains cas est inférieur à  $\beta^*$ , cas où le procédé numérique d'intégration n'est pas convergent. Le développement en série de  $\beta^*$  pour  $s \rightarrow s_j$  ( $s > s_j$ ) suivant les puissances entières de  $(s - s_j)$  s'écrit, en se limitant au premier terme :

$$\beta^* = -g_1(M_\infty, \sigma) \frac{s_j}{R} + 3 \left[ 1 - g_2(M_\infty, \sigma) \frac{s_j}{R} \right] \frac{s - s_j}{R}$$

$$\text{où } g_1 = -\frac{2}{7} \gamma M_\infty^2 \left( \frac{p_{e0}}{p_\infty} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} A^{-1} \left[ A \frac{1-\gamma}{\gamma} - \frac{1}{2} \left( \frac{p_{e0}}{p_\infty} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]^{-1}$$

$$g_2 = \gamma M_\infty^2 \sigma A^{-1} \left[ \frac{5}{7} A \frac{1-\gamma}{\gamma} - \frac{1}{2} \left( \frac{p_{e0}}{p_\infty} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right] \left[ A \frac{1-\gamma}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{p_{e0}}{p_\infty} \right]^{-1}$$

et  $A = 1 + \gamma M_\infty^2 \sigma^2$ . Or  $g_1$  à  $\sigma$  donné est une fonction décroissante de  $M_\infty$ , de sorte que  $\beta_j^*$  pour  $s = s_j$  est également fonction décroissante de  $M_\infty$ .

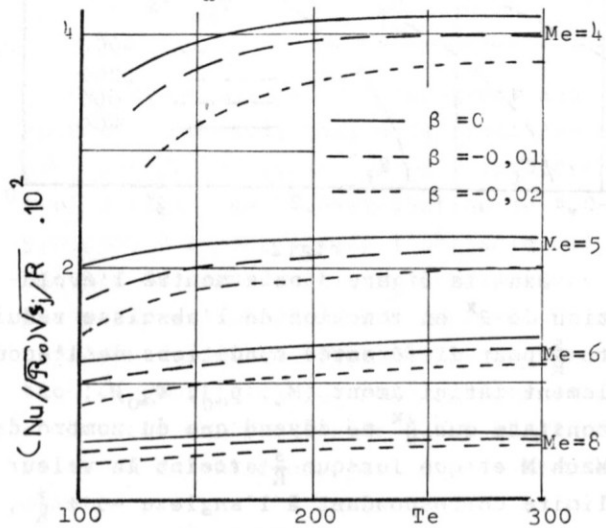


Fig.6

Les courbes concernant les solutions  $(\theta'_w)_j$  ou plutôt  $(Nu/\sqrt{\mathcal{R}_0})_j \cdot \sqrt{s_j/R}$

fonctions de  $T_e$ , à  $M_e$  constant, représentées dans la figure 6, rendent compte à nouveau de la discontinuité des solutions au raccordement cône-jupe, discontinuité qui tend à disparaître pour  $M_e \gg 1$  et  $T_e > 300^\circ\text{K}$  ( $T_w/T_e < 1$ ).

En ce qui concerne les courbes de la figure 7 relatives aux obstacles  $s_j/R=0,1$  et  $0,58$ , dans les conditions suivantes :  $M_\infty = 7$ ,  $p_{\infty 0} = 8$  et  $25$  bars,  $T_{\infty 0} = 600^\circ\text{K}$ ,  $R = 20, 30$  et  $19,2$  cm et la courbe de la figure 8 relative à l'obstacle  $s_j/R = 0,1$  dans les conditions  $M_\infty = 10$ ,  $p_{\infty 0} = 120$  et  $184$  bars,  $T_{\infty 0} = 5200$  et  $4000^\circ\text{K}$ ,  $R = 100$  cm, on retiendra les faits suivants résultant de la comparaison entre la théorie et l'expérience, faits qui confirment d'ailleurs les conclusions énoncées ci-dessus : la théorie ne rend pas compte des expériences au voisinage du raccordement pour les obstacles  $s_j/R = 0,1$ ,  $M_\infty = 7$ ,  $T_{\infty 0} = 600^\circ\text{K}$  ( $T_e \sim 70^\circ\text{K}$ ), constitue une très bonne approximation dans le cas  $M_\infty = 10$ ,  $T_{\infty 0} = 5000^\circ\text{K}$ , ( $T_e \sim 300^\circ\text{K}$ ) ; en ce qui concerne les obstacles  $s_j/R = 0,58$  les équations n'admettent de solutions que pour  $\frac{s - s_j}{R} > 0,06$  correspondant à  $\beta^x > \beta_l^x = -0,37$ .

Dans tous les cas, les solutions relatives aux obstacles  $\frac{s_j}{R} \neq 0$  tendent à se confondre avec celles relatives aux obstacles  $s_j/R = 0$  lorsque  $\frac{s}{R}$  augmente ; résultat confirmé par les expériences de mesure de flux de chaleur.

—  $s_j/R=0$  ( $p_{\infty 0}=8 : R=30\Delta, R=20\blacktriangle$ )  
 - - -  $s_j/R=0,1$  ( $R=30:p_{\infty 0}=8 \circ, p_{\infty 0}=25 \bullet$ )  
 - - -  $s_j/R=0,58$  ( $R=19:p_{\infty 0}=8 \square, p_{\infty 0}=25 \blacksquare$ )

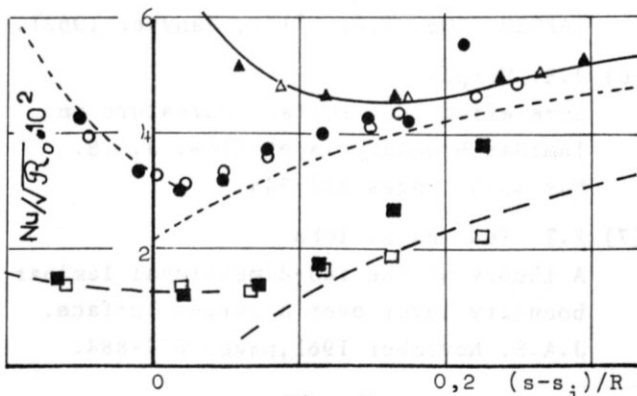


Fig. 7

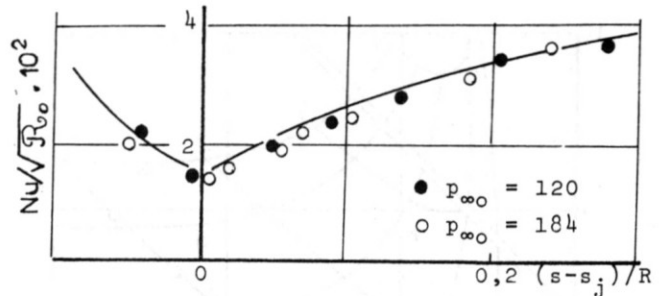


Fig. 8

Il est à remarquer qu'aucun décollement de la couche limite n'est constaté sur les obstacles expérimentés, y compris dans le cas où  $\beta^x$  est inférieur à  $\beta_l^x$ . On peut, par ailleurs, en adoptant le critère de décollement de la couche limite laminaire qui, selon Chapman<sup>(11)</sup>, est formulé sous la forme suivante :

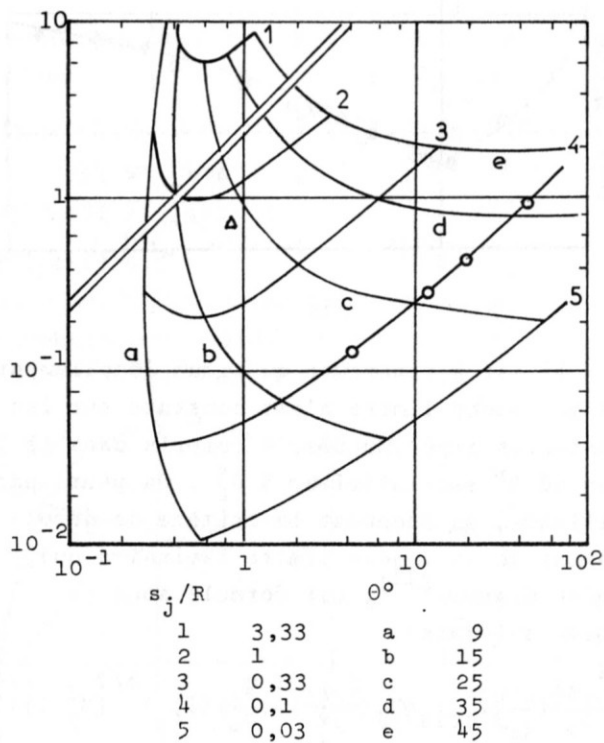
$$\frac{L^2}{q_\infty} \left( \frac{d^2 p}{dx^2} \right)_{\text{crit}} = K_s \left( \frac{L_{\text{réf}}}{\delta_j^x} \right)^2 \left( \frac{q_j}{q_\infty} \right) (C_{f_j})^{3/2} (M_j^2 - 1)^{1/4} \quad (3)$$

( $K_s \sim 2,3$  a été déterminée expérimentalement par Kabelitz), définir les régions de décollement et de non décollement de la couche limite sur la surface des obstacles de révolution  $s_j/R \neq 0$  ; la figure 9 représente ces régions : on a porté suivant l'axe des ordonnées les valeurs de

$$\frac{L^2}{q_\infty} \left( \frac{d^2 p}{dx^2} \right) = 4(\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_j) \left( \frac{L_{\text{réf}}}{s - s_j} \right)^2 \quad (4)$$

la longueur de référence  $L$  étant prise égale au diamètre de la base de l'obstacle, et sur l'axe des abscisses les valeurs calculées du second membre de l'équation (3). On peut constater les faits suivants : pour  $s_j \rightarrow 0$  la séparation de la couche limite ne peut jamais se produire ; pour  $s_j$  croissant il devrait exister des valeurs de  $\frac{s_j}{R} > 1$  pour lesquelles il y a séparation de la couche limite.

Cette étude a été réalisée sous la direction scientifique de Monsieur J. Valensi à qui les auteurs adressent leurs plus vifs remerciements.



Expériences {  $\circ$   $\Delta$

Fig.9

Notations

- p pression
- $\rho$  densité
- u vitesse
- $\mu$  viscosité
- T température
- h enthalpie
- K conductivité thermique
- cp chaleur spécifique à pression cte
- r rayon d'une section droite
- R rayon de courbure de la méridienne
- s abscisse curviligne
- $\alpha$  angle de la tangente de la méridienne avec l'axe de symétrie
- $\sigma$  demi-angle d'ouverture du cône

$$\xi = \int_0^\alpha \rho_e \mu_e u_e r^2 R d\alpha$$

$$\eta = \frac{u_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^\infty \rho dy \quad \beta = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}$$

$$\beta^x = \frac{T_{eo}}{T_e} \beta \quad Nu = \frac{Q_w \cdot Cp_{eo}}{K_{eo} (h_{eo} - h_w)} \frac{R}{\mu_{eo}}$$

$$Re_o = \rho_{eo} (h_{eo})^{1/2} \frac{R}{\mu_{eo}}$$

$$Cp = \frac{2 (p - p_\infty)}{\gamma M_\infty^2 p_\infty}$$

$Q_w$  densité de flux de chaleur

Indices :  $\infty$  : écoulement non perturbé ;  
 e : écoulement extérieur à la couche limite ;  
 w : paroi ; o : conditions d'arrêt ;  
 j : jonction cône-jupe.

Bibliographie

- (1) J.P. Guibergia et R. Marmey  
Comptes-Rendus, 273, série A, 1971, pages 1109-1112 et pages 1311-1314.
- (2) J. Valensi et M. Behar  
Comptes-Rendus, 253, 1961, p.70.
- (3) C.B. Cohen et E. Reshotko  
Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient (Recent advances in heat and mass transfer, 1961).
- (4) C.F. Dewey Jr et J.F. Gross  
Exact similar solutions of the laminar boundary layer equations (Advances heat transfer, 4, Academic Press, 1967, p.317).
- (5) I. Flügge-Lotz and F.G. Blottner  
Computation of the compressible laminar boundary layer flow including displacement thickness interaction using finite difference methods.  
(AFOSR 2206. T.R. n°131, Janvier 1962).
- (6) J.S. Murphy  
Some effects of surface curvature on laminar boundary layer flow. J.A.S. May 1953, pages 338-344.
- (7) K.T. Yen and K. Toba  
A theory of the two-dimensional laminar boundary layer over a curved surface. J.A.S. November 1961, pages 877-884.



- (8) F. Schultz-Grunow and W. Brener  
Laminar boundary layers on cambered  
walls. Institut für Mechanik Technis-  
che Hochschule Aachen.
- (9) M. Van Dyke  
(J. Fluid Mech. 14 p.161-177 and  
p.481-495 (1962)).
- (10) V. Zakkay et A. Bos  
Laminar, transitional and turbulent  
flow with adverse pressure gradient  
on a cone-flare at Mach 10 (A.I.A.A.  
Journal, 5 Février 1967).
- (11) H.P. Kabelitz and W. Wyborny  
Preliminary results of an investigation  
on hypersonic boundary layer separation  
on axisymmetric compression bodies  
Institut für Angewandte Gasdynamik der  
DFVLR, Porz-Wahn, July 1970.
- (12) P.K. Chang  
Separation of flow. Pergamon Press,  
1966.