

ICAS Paper No. 68-44

BERECHNUNG DER DRUCKVERTEILUNG AN SCHLANKEN
FLUGKÖRPERN MIT BELIEBIGER GRUNDRIS- UND QUER-
SCHNITTSFORM IN UNTER- UND ÜBERSCHALLSTRÖMUNG

von

Dietrich Hummel
Technische Universität Braunschweig
Institut für Strömungsmechanik

**The Sixth Congress
of the
International Council of the
Aeronautical Sciences**

DEUTSCHES MUSEUM, MÜNCHEN, GERMANY / SEPTEMBER 9-13, 1968

Preis: DM 2.00

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Second block of faint, illegible text, appearing as several lines of a document.

Third block of faint, illegible text, continuing the document's content.

Fourth block of faint, illegible text, showing further details of the document.

Fifth block of faint, illegible text, likely the concluding part of the document.

BERECHNUNG DER DRUCKVERTEILUNG AN SCHLANKEN FLUGKÖRPERN MIT BELIEBIGER GRUNDRIS- UND QUERSCHNITTSFORM IN UNTER- UND ÜBERSCHALLSTROMUNG*

Dietrich Hummel

Technische Universität Braunschweig
Institut für Strömungsmechanik**

Übersicht

Es wird ein Verfahren zur Berechnung der Druckverteilung sowie der Gesamtkräfte und -momente an Körpern mit endlicher Dicke und kleinen Seitenverhältnissen nach der Theorie schlanker Körper angegeben. Das zugehörige zweidimensionale Problem in der Querschnittsebene wird mit Hilfe von Wirbel- und Quellverteilungen auf der Kontur gelöst. Es können beliebige Querschnittsformen mit abgerundeten und mit zugeschärften Kanten behandelt werden. Der Einfluß der Machzahl ergibt sich aus der Lösung der vollständigen linearisierten Potentialgleichung für den äquivalenten Rotationskörper für Unter- und Überschallgeschwindigkeit.

Das Verfahren wurde auf die Überschallströmung um kegelige Körper mit beliebigen Querschnitten sowie auf die Unter- und Überschallströmung um einen nicht kegeligen Körper angewandt. Die Ergebnisse werden mit der Theorie dünner Flügel, der Theorie schlanker dünner Flügel sowie mit Messungen verglichen.

Summary

In this paper a method is presented to calculate the pressure distribution and the overall forces and moments of low aspect ratio bodies of finite thickness according to slender body theory. The corresponding two-dimensional problem in the plane of the cross-section is solved using the method of continuous distributions of vortices and sources which are located on the contour. Arbitrarily shaped cross-sections with rounded edges as well as with sharp edges can be treated. The influence of Mach number is determined by solving the complete linearized potential equation for the equivalent body of revolution for subsonic and supersonic speeds.

The method is applied to the supersonic flow around conical bodies with arbitrary cross-sections and to the subsonic and supersonic flow around a non-conical body. The results are compared with thin wing theory, slender thin wing theory and with experimental data.

*Gekürzte Fassung der gleichnamigen Dissertation T.U. Braunschweig 1968 [29]. Eine ausführlichere Fassung wird im Jahrbuch 1968 der DGLR veröffentlicht werden.

**Leiter: Prof. Dr. Dr. Ing. E. h. H. Schlichting

1. Einleitung

Auf verschiedenen Gebieten der Aerodynamik haben in den letzten Jahren Flugkörper mit kleinen Seitenverhältnissen und großer Dicke immer mehr an Bedeutung gewonnen. Zwei typische Beispiele für solche Flugkörper sind in Bild 1 dargestellt. Geplante Überschallflugzeuge und Raumgleiter (Bild 1a) sollen nach einem Flug im Welt- raum mit aerodynamischen Hilfsmitteln zur Erde zurückkehren. Dazu werden schlanke Körper mit beträchtlicher Dicke benutzt, die mit stark abgerundeten Vorderkanten versehen sind, um den Wärmeübergang beim Eintritt in die dichteren Schichten der Atmosphäre klein zu halten. Auch für Überschallflugzeuge sind Körperformen mit kleinen Seitenverhältnissen und relativ großer Dicke von Bedeutung wie der RAE- Entwurf [1] in Bild 1b zeigt. Bei diesem Flugzeug sind Flügel und Rumpf zu einem Flugkörper integriert. Die Vorderkanten sind scharfkantig ausgeführt, um bei größeren Anstellwinkeln durch Strömungsablösungen nichtlinearen Auftrieb zu erzeugen. Bei den hier genannten Flugkörpern sind außer den aerodynamischen Eigenschaften bei Überschall- und Überschallgeschwindigkeiten wegen Start und Landung auch die aerodynamischen Eigenschaften bei Unterschallgeschwindigkeit von Bedeutung.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchungen ist es, für den Bereich der Unter- und Überschallströmung die Druckverteilung an solchen schlanken dicken Körpern zu berechnen. In der Tragflügeltheorie gibt es eine ganze Reihe von Verfahren zur Berechnung der Druckverteilung auf der Oberfläche von Körpern:

Für Körper ohne Dicke (ebene Platte) ist die linearisierte Tragflächentheorie für Unter- und Überschallgeschwindigkeit sehr weit entwickelt [2]. Bei schlanken Flügeln kann die von R. T. Jones [3] begründete Theorie schlanker Flügel angewendet werden.

Für tragflügelartige dünne Körper sind die linearisierte Theorie zur Theorie dünner Körper [2] und die Theorie schlanker Flügel zur Theorie schlanker dünner Körper nach F. Keune [4] weiterentwickelt worden. In beiden Fällen werden Singularitätenverfahren zur Lösung benutzt. Der Körper wird in seiner Grundrißebene durch eine Quellverteilung ersetzt und die Randbedingung auf der Körperoberfläche (kinematische Strömungsbedingung) wird näherungsweise mit den in der Grundrißebene induzierten Störgeschwindigkeiten erfüllt. Beispielrechnungen an schlanken Körpern wurden nach der Theorie dünner Körper von E. Emlin [5] und J. Weber [6] und nach der Theorie schlanker dünner Körper von

F. Keune, K. Oswatitsch [7], W.T. Lord, G.G. Brebner [8], K. Gersten [9], E. Emlin-ton [5] und J. Weber [6] durchgeführt.

Zur Berechnung der Druckverteilung an dicken Körpern ist es notwendig, die bisher auf Grund der geringen Dicke des Körpers getroffenen Vereinfachungen in den Randbedingungen auf dem Körper aufzuheben und die kinematische Strömungsbedingung mit den auf der Körperkontur induzierten Störgeschwindigkeiten zu erfüllen. In der linearisierten Theorie gibt es derartige Lösungen mit exakten Randbedingungen für Rotationskörper in Unter- und Ueberschallströmung [2], die jedoch hier nicht weiter betrachtet werden sollen. Für das dreiaxige Ellipsoid wurde von K. Maruhn [10] die exakte Lösung für inkompressible Strömung angegeben. Für beliebige Körper stammt das einzige exakte Verfahren von J.L.Hess, A.M.O. Smith [11]. Bei diesem Verfahren wird die Körperoberfläche mit einer flächenhaften Quell-Senken-Verteilung belegt und die kinematische Strömungsbedingung auf der Körperkontur erfüllt. Das Verfahren ist auf auftriebslose inkompressible Strömung beschränkt. Ein ähnliches Verfahren für Ueberschallströmung fehlt bisher. Näherungslösungen für mäßig dicke Flügel wurden von F. Keune [12] und M.C.P.Firmin [13] angegeben.

Auch bei der Theorie schlanker Körper gibt es Verfahren, bei denen die Randbedingungen auf der Körperoberfläche erfüllt werden. Zur Lösung des zweidimensionalen Problems in der Querschnittsebene werden dabei zwei verschiedene Methoden verwendet: Bei der einen wird dieses Problem mit Hilfe von kontinuierlichen Verteilungen von Singularitäten auf der Kontur gelöst. Auf dieser Methode beruht das Verfahren von G.N.Ward [14]. Es kann auf beliebige Querschnittsformen ohne starke Krümmungen und ohne Ecken angewendet werden. Beispielrechnungen für elliptische Kegel stammen von L.E. Fraenkel [15] und A. Kahane, A. Solarski [16]. Ebenfalls auf Singularitätenverfahren beruhen die Arbeiten von K. Gersten [9] und K. Gersten, J.v.d.Decken [17]. Die andere Methode zur Lösung des zweidimensionalen Problems in der Querschnittsebene ist die der konformen Abbildung. Diese Methode ist die Grundlage des Verfahrens von A.H. Sacks [18]. Es ist auf beliebige Querschnittsformen einschließlich solcher mit Ecken anwendbar. Die Schwierigkeit bei der praktischen Durchführung besteht darin, die Abbildungsfunktion zu finden, welche einen beliebig gegebenen Querschnitt in einen Kreis überführt. Deshalb wurden bisher nur wenige Lösungen für einfache Querschnittsformen von T. Nonweiler [19], R.S. Bartlett [20], J. Weber und E.C. Maskell in [21] bekannt. Vor kurzem wurde jedoch von R.Skulsky [22] ein allgemeines Verfahren entwickelt, bei dem die Abbildungsfunktion mit Hilfe einer Reihenentwicklung für beliebige Querschnitte numerisch berechnet werden kann. Ein Näherungsverfahren für mäßig dicke schlanke Körper wurde von J.C. Cooke [23] angegeben.

In der vorliegenden Arbeit wird nun ebenfalls ein Verfahren zur Berechnung der Druckverteilung an schlanken, dicken Körpern mit beliebiger Grundriß- und Querschnittsform nach der Theorie schlanker Körper angegeben. Zur Lösung des zweidimensionalen Problems in der Querschnittsebene wird das Singularitätenverfahren in einer Form benutzt, die es gestattet, auch Querschnitte mit starken Krümmungen und Ecken zu behandeln. Im Vergleich zur Methode der konformen Abbildung ist die Anwendung dieses Verfahrens auf beliebige Querschnitte sehr einfach.

2. Bezeichnungen

2.1 Geometrische Größen

x, y, z	Körperfeste Koordinaten nach Bild 1
y, z	Koordinaten in der Ebene $x = \text{konst}$
l	Länge des Körpers nach Bild 1
$l_{\mu} = \frac{1}{F} \int_{-s}^{+s} l^2(y) dy$	Bezugsflügeltiefe
$b = 2s$	Spannweite des Körpers nach Bild 1
d	Maximale Dicke d. Körpers nach Bild 1
F	Grundrißfläche
$\Lambda = b^2/F$	Seitenverhältnis
$f(x)$	Querschnittsfläche
$y_1(x)$	Oertliche Halbspannweite
$\xi = x/l$	} Dimensionslose Koordinaten
$\eta = y/y_1$	
$\zeta = z/y_1$	
$\dot{\eta}; \dot{\zeta}$	Ableitungen von $\eta(\varphi)$ und $\zeta(\varphi)$ nach φ
$s(y, z)$	Konturkoordinate nach Bild 2
$\varphi(s)$	Konturparameter ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)
α	Anstellwinkel (gegen $\zeta = 0$)
\mathcal{J}	Eckenwinkel nach Bild 3

2.2 Aerodynamische Größen

U_{∞}	Anströmgeschwindigkeit
$q_{\infty} = \frac{\rho}{2} U_{\infty}^2$	Staudruck der Anströmung
p	Statischer Druck
$\Phi_{\pm}(y, z; x)$	Störpotential nach Gl.(3)
$\Phi(y, z; x)$	Gesamtpotential in der Ebene $x = \text{konst}$ nach Gl.(29)
$g(x)$	Raumeinflußfunktion nach Gl.(6)
u, v, w	Störgeschwindigkeiten nach Gl.(2)
w_n, w_t	Geschwindigkeitskomponenten normal bzw. tangential zur Kontur
γ	Wirbelverteilung auf der Kontur
q	Quellverteilung auf der Kontur
G	Dimensionslose Wirbelverteilung nach den Gln.(16) und (20)
Q_0	Dimensionslose Quellverteilung nach Gl.(21)
Ma	Machzahl
$c_N = N/Fq_{\infty}$	Normalkraftbeiwert
$c_T = T/Fq_{\infty}$	Tangentialkraftbeiwert
$c_M = M/F l_{\mu} q_{\infty}$	Nickmomentenbeiwert, bezogen auf den geom.Neutralpunkt, schwanzlastig positiv
$c_A = A/Fq_{\infty}$	Auftriebsbeiwert
$c_W = W/Fq_{\infty}$	Widerstandsbeiwert

c_{W0} Widerstandsbeiwert bei $c_A = 0$
 $c_p = (p - p_{\infty}) / q_{\infty}$ Druckbeiwert

2.3 Indizes

α	Vom Anstellwinkel abhängige Größe
o	Von der Dicke herrührende Größe
K	Auf der Kontur
i	Im Innern der Kontur
e	Ecke
—	Dimensionslose Größen nach den Gln.(30), (31) und (36)

3. Theorie schlanker dicker Körper

3.1 Problemstellung

3.1.1 Grundgleichungen

Im folgenden soll die Druckverteilung auf der Oberfläche eines angestellten dicken Körpers durch Lösung der linearisierten Potentialgleichung

$$(1 - Ma^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

berechnet werden. Die Störgeschwindigkeiten ergeben sich aus dem Störpotential zu

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2)$$

Unter der Voraussetzung, daß der Körper schlank ist, kann nach R.T. Jones [3] das erste Glied in Gl.(1) gegenüber den beiden anderen vernachlässigt werden, und man erhält die bekannte Potentialgleichung der Theorie schlanker Körper

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Die Lösung dieser Gleichung stellt ein zweidimensionales Problem in der Querschnittsebene $x = \text{konst}$ dar. Weit vor dem Körper sind die Störgeschwindigkeiten

$$x = -\infty : u = v = w = 0 \quad (4)$$

Auf der Körperkontur $z = z_K(x, y)$ ist der Vektor der resultierenden Strömungsgeschwindigkeit tangential zur Kontur. Diese Randbedingung lautet für kleine Anstellwinkel ($\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1$) und mit der Vernachlässigung $u \ll U_{\infty}$ wegen der Schlankheit des Körpers

$$U_{\infty} \frac{\partial z_K}{\partial x} + v \frac{\partial z_K}{\partial y} - (U_{\infty} \alpha + w) = 0 \quad (5)$$

3.1.2 Aufspaltung des Störpotentials

Für die allgemeine Lösung von Gl.(3) kann folgender Ansatz für das Störpotential gewählt werden

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_{\alpha}(y, z; x) + \Phi_o(y, z; x) + g(x) \quad (6)$$

Dabei ist Φ_{α} das durch die Querströmungskomponente αU_{∞} hervorgerufene Störpotential (Querströmungsproblem) und Φ_o das infolge der Längsströmungskomponente U_{∞} auftretende Störpotential (Längsströmungsproblem), während $g(x)$ die sogenannte Raumeinflußfunktion darstellt. Führt man den Ansatz (6) in die Potentialgleichung (3) ein, so wird diese erfüllt durch die

beiden Beziehungen

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\alpha}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{\alpha}}{\partial z^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial z^2} = 0 \quad (7a, b)$$

Entsprechend Gl.(6) setzen sich auch die Störgeschwindigkeiten nach Gl.(2) zusammen

$$u = u_{\alpha} + u_o + u_g ; \quad v = v_{\alpha} + v_o ; \quad w = w_{\alpha} + w_o \quad (8)$$

Für die Randbedingung (5) ergibt sich mit Gl.(8)

$$U_{\infty} \frac{\partial z_K}{\partial x} + v \frac{\partial z_K}{\alpha \partial y} + v \frac{\partial z_K}{\partial y} - w_{\alpha} - w_o = U_{\infty} \alpha \quad (9)$$

Auch diese Randbedingung kann man analog zu Gl.(7) in zwei Teile aufspalten, indem man die in Gl.(9) unterstrichenen und die übrigen Glieder jeweils für sich betrachtet. Damit läßt sich das Problem der Berechnung der Potentialfunktion auf die Lösung zweier Teilprobleme zurückführen:

a) Querströmungsproblem ($\alpha \neq 0$)

In der Ebene $x = \text{konst}$ wird die zweidimensionale Potentialgleichung (7a) für die Umströmung des Körpers mit der Geschwindigkeit $U_{\infty} \alpha$ gelöst. Die zugehörige Randbedingung lautet nach Gl.(9)

$$v \frac{\partial z_K}{\alpha \partial y} - w_{\alpha} = U_{\infty} \alpha \quad (9a)$$

Diese Gleichung stellt die zweidimensionale kinematische Strömungsbedingung auf der Kontur für die Strömung in der Querschnittsebene dar.

b) Längsströmungsproblem ($\alpha = 0$)

In der Ebene $x = \text{konst}$ wird die zweidimensionale Potentialgleichung (7b) für die Randbedingung

$$U_{\infty} \frac{\partial z_K}{\partial x} + v_o \frac{\partial z_K}{\partial y} - w_o = 0 \quad (9b)$$

gelöst. Diese dreidimensionale kinematische Strömungsbedingung hat zur Folge, vgl. [17], daß in der Querschnittsebene $x = \text{konst}$ auf der Kontur eine Normalkomponente der Geschwindigkeit

$$\frac{w_{nK}}{U_{\infty}} = \frac{\frac{\partial z_K}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_K}{\partial y}\right)^2}} \quad (10)$$

auftritt, die für gegebene Körpergeometrie $z = z_K(x, y)$ nach Gl.(10) als bekannt anzusehen ist.

3.2 Aufstellung der Integralgleichungen

Die Lösung der zweidimensionalen Potentialgleichung (7) wird im folgenden mit Hilfe von kontinuierlichen Verteilungen von Wirbeln und Quellen auf der Kontur des Körpers durchgeführt. Im Innern der Kontur wird nach E. Martensen [24] ein spezielles Strömungsfeld gewählt, bei dem die Geschwindigkeiten gleich Null sind, $w_{ti} = w_{ri} = 0$. Mit dieser Ruhebedingung gelten für die Wirbelverteilung γ und für die Quellverteilung q_o :

$$\gamma = w_{tK} ; \quad q_o = w_{nK} \quad (11)$$

Die Körperkontur sei in der Parameterdarstellung $\frac{y_K}{y_1} = \eta_K(\varphi, x); \frac{z_K}{y_1} = \zeta_K(\varphi, x)$ (12)

gegeben. Dabei bedeuten $y_1(x)$ die örtliche Halbspannweite und φ einen auf der Kontur laufenden Parameter ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

3.21 Querströmungsproblem ($\alpha \neq 0$)

Beim Querströmungsproblem tritt eine Normalkomponente der Geschwindigkeit auf der Kontur und damit eine Quellverteilung nicht auf. Die Kontur wird nach Bild 2a mit einer Wirbelverteilung $\gamma_\alpha(s')$ belegt. In einem Punkt A auf der Kontur induzieren die Wirbel zusammen mit der Querströmung $U_\infty \alpha$ eine Tangentialgeschwindigkeit

$$w_{tm} = \frac{\gamma_\alpha}{2} \quad (13)$$

Berechnet man w_{tm} aus dem Biot-Savart'schen Gesetz, so folgt aus Gl.(13)

$$G_\alpha(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_1(\varphi, \varphi') G_\alpha(\varphi') d\varphi' = 2\dot{\zeta}_K \quad (14)$$

$$\text{mit } K_1(\varphi, \varphi') = 2 \frac{(\eta_K - \eta'_K) \dot{\zeta}_K - (\zeta_K - \zeta'_K) \dot{\eta}_K}{(\eta_K - \eta'_K)^2 + (\zeta_K - \zeta'_K)^2} \quad (15)$$

wobei eine dimensionslose reduzierte Wirbelverteilung

$$G_\alpha = \sqrt{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{\gamma_\alpha}{U_\infty \alpha} \quad (16)$$

eingeführt wurde. Gl.(14) stellt eine Integralgleichung für die unbekannte Wirbelverteilung G_α dar.

3.22 Längsströmungsproblem ($\alpha = 0$)

Beim Längsströmungsproblem ist die Quellverteilung $q_0(s')$ auf der Kontur nach den Gln.(10) und (11) vorgegeben. Um die Ruhebedingung im Innern erfüllen zu können, muß nach Bild 2b eine zusätzliche Wirbelverteilung $\gamma_0(s')$ auf der Kontur angeordnet werden. Quell- und Wirbelverteilung induzieren auf der Kontur eine Tangentialgeschwindigkeit

$$w_{tm} = \frac{\gamma_0}{2} \quad (17)$$

die sich einfach berechnen läßt. Analog zu Gl.(14) ergibt sich

$$G_0(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_1(\varphi, \varphi') G_0(\varphi') d\varphi' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_2(\varphi, \varphi') Q_0(\varphi') d\varphi' \quad (18)$$

mit $K_1(\varphi, \varphi')$ nach Gl.(15) und

$$K_2(\varphi, \varphi') = 2 \frac{(\eta_K - \eta'_K) \dot{\eta}_K + (\zeta_K - \zeta'_K) \dot{\zeta}_K}{(\eta_K - \eta'_K)^2 + (\zeta_K - \zeta'_K)^2} \quad (19)$$

wobei die dimensionslosen reduzierten Singularitätenverteilungen

$$G_0 = \sqrt{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{\gamma_0}{U_\infty \cdot (dy_1/dx)} \quad (20)$$

$$Q_0 = \sqrt{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{q_0}{U_\infty \cdot (dy_1/dx)} \quad (21)$$

eingeführt wurden. Die beiden Integralgleichungen (14) und (18) unterscheiden sich nur durch die rechten Seiten, die jeweils bekannt sind. Die Kernfunktion K_1 ist für $\varphi' \rightarrow \varphi$ regulär [24], während K_2 für $\varphi' \rightarrow \varphi$ singularär wird. Beide Integralgleichungen lassen sich durch Reduktion auf ein lineares Gleichungssystem lösen. Für Gl.(14) ergibt sich das System

$$G_{\alpha\mu} - \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} K_{1\mu\nu} \cdot G_{\alpha\nu} = 2\dot{\zeta}_{K\mu} \quad (22)$$

Dabei sind $G_{\alpha\mu}$ und $\dot{\zeta}_{K\mu}$ sowie $G_{\alpha\nu}$ die Werte der zugehörigen Funktionen an den Stellen

$$\varphi_\mu = \frac{\mu \cdot \pi}{N} \quad \text{mit } \mu = 0, 1, \dots, 2N-1$$

$$\text{und } \varphi_\nu = \frac{\nu \cdot \pi}{N} \quad \text{mit } \nu = 0, 1, \dots, 2N-1$$

3.3 Behandlung von Ecken im Konturverlauf

In Eckpunkten $\varphi = \varphi_e$ sind die Funktionen $\eta_K(\varphi)$ und $\zeta_K(\varphi)$ im allgemeinen nicht stetig und daher ist auch die Kernfunktion $K_1(\varphi, \varphi')$ für $\varphi \rightarrow \varphi_e$ nicht stetig. Aus der ebenen Strömung um konvexe Ecken ist bekannt, daß die Geschwindigkeit im Eckpunkt unendlich groß ist. Deshalb sind auch die Wirbelverteilungen G_α und G_0 an einer Ecke unendlich, falls $\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2 \neq 0$. Wegen dieser Unstetigkeiten ist es im allgemeinen nicht möglich, die Integrale in den Gln.(14) und (18) wie in Gl.(22) angegeben auszuwerten.

Um diese Schwierigkeiten zu beseitigen, wird im folgenden eine von P.Pal [25] in der ebenen Profiltheorie angegebene Methode benutzt. Der Zusammenhang zwischen dem Konturparameter φ und der Koordinate s längs der Kontur wird in der Umgebung der Ecke ($s = s_e, \varphi = \varphi_e$) entsprechend

$$\Delta s = C_1 \cdot (\Delta \varphi)^n \quad (23)$$

mit $\Delta s = |s - s_e|$, $\Delta \varphi = |\varphi - \varphi_e|$ und C_1 als Konstante gewählt. Benutzt man die bekannte Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung einer konvexen Ecke mit dem Eckenwinkel $\mathcal{J} < \pi$ nach Bild 3a

$$w_{tK}(\Delta s) / U_\infty \alpha = C_2 \cdot \Delta s^{\frac{\mathcal{J} - \pi}{2\pi - \mathcal{J}}}, \quad (24)$$

so ergibt sich für die Wirbelverteilung G_α nach Gl.(16)

$$G_\alpha = \frac{w_{tK}}{U_\infty \alpha} \cdot \frac{1}{y_1} \cdot \frac{d(\Delta s)}{d(\Delta \varphi)} = \frac{n}{y_1} C_1 \cdot C_2 (\Delta s)^{\frac{\mathcal{J} - \pi}{2\pi - \mathcal{J}} + \frac{n-1}{2}} \quad (25)$$

Ein endlicher Wert von G_α für $\Delta s \rightarrow 0$ existiert, falls

$$n = 2 - \frac{\mathcal{J}}{\pi} \quad (26)$$

Für den Grenzwert ergibt sich

$$G_{\alpha e} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} G_\alpha = \frac{n}{y_1} C_1^{\frac{1}{n}} C_2 \quad (27)$$

In der Umgebung der Ecke muß also die Funktion $\eta_K(\varphi)$ entsprechend

$$\Delta \eta_K = |\eta_K - \eta_e| = C_3 (\Delta \varphi)^{2 - \frac{\mathcal{J}}{\pi}} \quad (28a)$$

gewählt werden. Damit der Grenzwert für G_{α}^{ae} nach Gl.(27) eindeutig ist, gilt für C_3^{ae} auf beiden Seiten der Ecke die Zusatzbedingung

$$\left[C_3 \sqrt{1 + \left(\frac{dz_K}{dy} \right)^2} \right]_{\varphi_e - 0} = \left[C_3 \sqrt{1 + \left(\frac{dz_K}{dy} \right)^2} \right]_{\varphi_e + 0} \quad (28b)$$

Wird eine Ecke nach Bild 3b wie eine Hinterkante umströmt, so ergibt sich mit den Gln.(23) und (26) sowie der bekannten Geschwindigkeitsverteilung der Wert $G_{\alpha e} = 0$.

Für eine Parameterdarstellung der Kontur nach Gl.(28a,b) ist nach P.Pal [25] die Kernfunktion $K_1(\varphi, \varphi')$ für $\varphi' = \varphi'_e$ stetig. Damit kann Gl.(14) wieder mit Gl.(22) ausgewertet werden. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Betrachtungen auch für die Funktion $G_0(\varphi)$ gültig sind.

3.4 Potentialverteilung

Beim Querströmungsproblem setzt sich das Gesamtpotential in der Querschnittsebene $x = \text{konst}$ aus dem Potential der Querströmung $U_{\infty} \alpha$ und aus dem von der Wirbelverteilung γ_{α} hervorgerufenen Störpotential zusammen

$$\Phi^+ = U_{\infty} \alpha \cdot z + \Phi_{\alpha} \quad (29)$$

Daraus erhält man auf der Kontur das dimensionslose Potential

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_K^+(\varphi, x) &= \frac{\Phi_K^+(\varphi, x)}{U_{\infty} \alpha \cdot l} = \\ &= \left[\zeta_K + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{\alpha}(\varphi') \arctan \frac{\eta_K' - \eta_K}{\zeta_K - \zeta_K'} d\varphi' \right] \frac{y_1}{l} \quad (30) \end{aligned}$$

Beim Längsströmungsproblem ist das Gesamtpotential in der Querschnittsebene gleich dem Störpotential, welches von der Wirbelverteilung γ_0 und der Quellverteilung q_0 hervorgerufen wird. Auf der Kontur ergibt sich für das dimensionslose Potential

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{oK}(\varphi, x) &= \frac{\Phi_{oK}(\varphi, x)}{U_{\infty} \cdot l} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} G_0(\varphi') \arctan \frac{\eta_K' - \eta_K}{\zeta_K - \zeta_K'} d\varphi' + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} Q_0(\varphi') \ln \frac{y_1}{l} \sqrt{(\eta_K' - \eta_K)^2 + (\zeta_K - \zeta_K')^2} d\varphi' \right] \frac{y_1}{l} \frac{dy_1}{dx} \quad (31) \end{aligned}$$

Die Störgeschwindigkeiten ergeben sich aus den Ableitungen des Störpotentials nach Gl.(2). Die Ableitungen normal und tangential zur Kontur in der Ebene $x = \text{konst}$ sind beim Querströmungsproblem

$$\left(\frac{\partial \Phi^+}{\partial n} \right)_K = 0; \quad \left(\frac{\partial \Phi^+}{\partial t} \right)_K = \gamma_{\alpha} \quad (32)$$

und beim Längsströmungsproblem

$$\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right)_K = q_0; \quad \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)_K = \gamma_0 \quad (33)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Ableitungen

$$u_{\alpha K} = \left(\frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x} \right)_K = \left(\frac{\partial \Phi^+}{\partial x} \right)_K \quad \text{und} \quad u_{oK} = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right)_K$$

allein mit Hilfe der Funktionen $\eta_K(\varphi)$,

$\zeta_K(\varphi)$, $Q_0(\varphi)$, $G_0(\varphi)$ und $G_{\alpha}(\varphi)$ sowie mit den Potentialverteilungen nach den Gln.(30) und (31) in jedem Schnitt $x = \text{konst}$ berechnet werden können. Beim Querströmungsproblem ergibt sich

$$\frac{u_{\alpha K}}{U_{\infty} \alpha} = \left(\frac{\partial \Phi_K^+}{\partial \xi} \right)_{\varphi} -$$

$$-G_{\alpha} \left[\frac{\eta_K \dot{\eta}_K + \zeta_K \dot{\zeta}_K}{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\dot{\eta}_K \left(\frac{\partial \eta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi} + \dot{\zeta}_K \left(\frac{\partial \zeta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi}}{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{y_1}{l} \right] \quad (34)$$

und beim Längsströmungsproblem erhält man

$$\frac{u_{oK}}{U_{\infty}} = \left(\frac{\partial \Phi_{oK}}{\partial \xi} \right)_{\varphi} - \quad (35)$$

$$-G_0 \frac{dy_1}{dx} \left[\frac{\eta_K \dot{\eta}_K + \zeta_K \dot{\zeta}_K}{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\dot{\eta}_K \left(\frac{\partial \eta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi} + \dot{\zeta}_K \left(\frac{\partial \zeta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi}}{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{y_1}{l} \right]$$

$$-Q_0 \frac{dy_1}{dx} \left[\frac{\eta_K \dot{\zeta}_K - \zeta_K \dot{\eta}_K}{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\dot{\zeta}_K \left(\frac{\partial \eta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi} - \dot{\eta}_K \left(\frac{\partial \zeta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi}}{\dot{\eta}_K^2 + \dot{\zeta}_K^2} \cdot \frac{y_1}{l} \right]$$

mit $\xi = x/l$. Für einen beliebigen Körper muß die Rechnung in verschiedenen Querschnittsebenen $\xi = \text{konst}$ durchgeführt werden. Aus den Ergebnissen lassen sich dann die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial \Phi_K^+}{\partial \xi} \right)_{\varphi}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_{oK}}{\partial \xi} \right)_{\varphi}, \quad \left(\frac{\partial \eta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi}, \quad \left(\frac{\partial \zeta_K}{\partial \xi} \right)_{\varphi}$$

für jede beliebige Stelle (x, φ) auf der Kontur berechnen.

3.5 Raumeinfluß

Die Raumeinflußfunktion $g(x)$ nach Gl.(6) ergibt sich nicht als Lösung von Gl.(3), sondern sie muß nach G.N.Ward [14], F.Keune, K.Oswatitsch [7] und Mac C.Adams, W.R.Sears [26] aus der vollständigen linearisierten Potentialgleichung (1) bestimmt werden. Dabei kann $g(x)$ statt für den gegebenen Körper für den sogenannten äquivalenten Rotationskörper, d.h. für den Rotationskörper mit gleicher Verteilung der Querschnittsfläche $f(x)$, berechnet werden. Im Gegensatz zu dem bisher behandelten Problem in der Querschnittsebene $x = \text{konst}$ ist die Raumeinflußfunktion von der Machzahl abhängig, $g(x, Ma)$. Nach [26] ergibt sich für Unterschallgeschwindigkeit, $Ma < 1$

$$\overline{g}(\xi, Ma < 1) = \frac{g(\xi, Ma)}{U_{\infty} \cdot l} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2}{l} \frac{df}{dx}(\xi) \ln \frac{\sqrt{1 - Ma^2}}{2} - \frac{1}{l} \left(\frac{df}{dx} \right)_{\xi=1} \ln(1 - \xi) - \int_0^{\xi} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi') \ln(\xi - \xi') d\xi' + \int_{\xi}^1 \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi') \ln(\xi' - \xi) d\xi' \right]$$

und für Ueberschallgeschwindigkeit, $Ma > 1$

$$\overline{g}(\xi, Ma > 1) = \frac{g(\xi, Ma)}{U_{\infty} \cdot l} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{l} \frac{df}{dx}(\xi) \ln \frac{\sqrt{Ma^2 - 1}}{2} - \int_0^{\xi} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi') \ln(\xi - \xi') d\xi' \right]$$

Der jeweilige Beitrag zur u -Komponente der

Störgeschwindigkeit nach Gl.(8) läßt sich mit

$$u_g(\xi, Ma)/U_\infty = \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{d\bar{g}}{d\xi} \quad (38)$$

aus den Gln.(36) und (37) bestimmen.

3.6 Druckverteilung

Aus der Geschwindigkeitsverteilung erhält man die Druckverteilung auf der Kontur. Für schlanke Körper ergibt sich

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = -2 \frac{u_{aK}}{U_\infty} - \frac{v_{aK}^2 + w_{aK}^2}{U_\infty^2}, \quad (39)$$

wobei u_a, v_a, w_a die Störgeschwindigkeiten im aerodynamischen Koordinatensystem (x, y_a, z_a) bedeuten. Die Umrechnung auf das flügelste Koordinatensystem liefert

$$c_p(\varphi, x, \alpha, Ma) = -2 \frac{u_{oK}(x, \varphi)}{U_\infty} - 2 \frac{u_g(x, Ma)}{U_\infty} - \frac{G_o^2 + G_\alpha^2}{\tilde{\eta}_K^2 + \zeta_K^2} \cdot \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 - 2 \left[\frac{u_{\alpha K}}{U_\infty \cdot \alpha} + \frac{G_\alpha G_o}{\tilde{\eta}_K^2 + \zeta_K^2} \cdot \frac{dy_1}{dx} \right] \alpha + \left[1 - \frac{G_\alpha^2}{\tilde{\eta}_K^2 + \zeta_K^2} \right] \alpha^2. \quad (40)$$

Dies ist die Gleichung für die Druckverteilung an einem beliebigen Körper in Unter- und Uberschallströmung nach der Theorie schlanker Körper. Die Druckverteilung enthält Beiträge aus dem Querströmungsproblem (Index α), aus dem Längsströmungsproblem (Index α) und aus dem Raumeinfluß (Index g). Außerdem tritt ein Koppelungsmitglied ($G_o \cdot G_\alpha$) zwischen Quer- und Längsströmungsproblem auf.

3.7 Gesamtbeiwerte

Die aerodynamischen Beiwerte lassen sich durch Integration über die Druckverteilung berechnen. Für die Beiwerte der Normalkraft, der Tangentialkraft und des Nickmomentes (bezogen auf N_{25}) ergibt sich

$$c_N = \frac{N}{q_\infty F} = \frac{2l^2}{F} \int_0^1 \frac{y_1}{l}(\xi) \int_0^\pi c_p(\varphi, \xi) \dot{\eta}_K(\varphi, \xi) d\varphi d\xi \quad (41)$$

$$c_T = \frac{T}{q_\infty F} = \quad (42)$$

$$= \frac{2l^2}{F} \int_0^1 \frac{dy_1}{dx}(\xi) \frac{y_1}{l}(\xi) \int_0^\pi c_p(\varphi, \xi) \cdot (\eta_K \zeta_K - \zeta_K \dot{\eta}_K) d\varphi d\xi$$

$$c_M = \frac{M}{q_\infty F l_\mu} = \quad (43)$$

$$= \frac{2l^2}{F} \cdot \frac{l}{l_\mu} \int_0^1 (\xi - \xi_{25}) \cdot \frac{y_1}{l}(\xi) \int_0^\pi c_p(\varphi, \xi) \dot{\eta}_K(\varphi, \xi) d\varphi d\xi.$$

Nach G.N. Ward [14] und Mac C. Adams, W.R.

Sears [26] können Normal- und Tangentialkraft auch ohne Kenntnis der Druckverteilung aus dem Impulssatz berechnet werden. Für kleine Anstellwinkel gilt für die Beiwerte von Auftrieb und Widerstand

$$c_A = A/q_\infty F = c_N - c_T \cdot \alpha \approx c_N \quad (44)$$

$$c_W = W/q_\infty F = c_T + c_N \cdot \alpha \quad (45)$$

4. Berechnung von Beispielen. Vergleich mit anderen Theorien und mit Messungen

Nach dem im Abschnitt 3 beschriebenen Verfahren wurde eine Reihe von Beispielen berechnet mit dem Ziel, die Ergebnisse nach der Theorie schlanker Körper mit denen anderer Verfahren sowie mit Messungen zu vergleichen. Im folgenden werden dazu einige typische Ergebnisse mitgeteilt.

4.1 Kegelige Körper

Für kegelige Körper wurden Beispielrechnungen nur bei Uberschallmachzahlen $Ma > 1$ durchgeführt. Als Beispiele für Körper ohne Ecken wurden der Kreiskegel sowie verschiedene elliptische Kegel gewählt. Dabei ergaben sich in allen Fällen die exakten Lösungen nach [15] und [16] mit guter Genauigkeit. Als Beispiele für Körper mit Ecken wurden Kegel mit bikonvexen, rhombischen und dreieckigen sowie einem beliebigen Querschnitt betrachtet.

4.11 Längsströmungsproblem

In Bild 4 ist die von J.W. Britton [21] gemessene Druckverteilung an einem nichtangestellten Kegel mit bikonvexem Querschnitt (Eckenwinkel $\vartheta = 60^\circ$, Seitenverhältnis $\lambda = 1,0$, Machzahl $Ma = 2,0$) mit verschiedenen theoretischen Druckverteilungen verglichen. Die vorliegenden Ergebnisse nach der Theorie schlanker Körper stimmen sehr gut mit denen überein, die nach [21] von J. Weber mit Hilfe der Methode der konformen Abbildung berechnet wurden. Beim Vergleich mit den Messungen liefert die von Gl.(1) ausgehende Theorie dünner Flügel [21] die beste Übereinstimmung, während die auf Gl.(3) beruhende Theorie schlanker dünner Flügel [21] und die Theorie schlanker Körper zu kleine Drücke ergeben. Die beiden Theorien für dünne Flügel liefern in der Umgebung der Ecke zu große Drücke, während die Theorie schlanker Körper die Abhängigkeit des Druckes von der Spannweite sehr gut wiedergibt.

In Bild 4 ist auch der aus den Gln.(42) und (45) ermittelte Widerstand nach der Theorie schlanker Körper mit den Messungen nach J.W. Britton [21] verglichen. Für beide Kegel (Eckenwinkel $\vartheta = 60^\circ$ und $\vartheta = 120^\circ$) nimmt der Unterschied zwischen Theorie und Messungen mit wachsender Machzahl zu. Wie bei der Druckverteilung ist der Grund für diese Abweichungen, daß die Voraussetzungen für eine Linearisierung der Potentialgleichung (1) mit zunehmender Machzahl immer schlechter erfüllt sind. Demgegenüber dürfte der Beitrag der Reibung zu diesen Unterschieden klein sein.

4.12 Querströmungsproblem

Der auftriebsabhängige Anteil der Druckverteilung $c_p(\alpha=0) - c_p(\alpha)$ ist in Bild 5 für einen rhombischen Kegel (Eckenwinkel $\vartheta = 60^\circ$, Seitenverhältnis $\lambda = 1,0$, Machzahl $Ma = 1,3$) beim Anstellwinkel $\alpha = 2^\circ$ dargestellt. Der Vergleich zwischen der Theorie schlanker Körper und den Messungen von J.W. Britton [21] ergibt eine sehr gute Übereinstimmung. Auch der nach der Theorie schlanker Körper ermittelte Normalkraftbeiwert stimmt für kleine Anstellwinkel gut mit den Messungen nach J.W. Britton [21] überein. Demgegenüber ergeben die Theorie schlanker Flügel nach R.T. Jones [3] mit

$$c_N = \frac{\pi}{2} \lambda \alpha \quad (46)$$

und auch die linearisierte Theorie für die ebene Platte [2] zu große Normalkraftbeiwerte. Das Querströmungsproblem ist demnach weniger empfindlich gegenüber Verletzungen der Schlankheitsbedingung als das Längsströmungsproblem.

4.13 Beliebige Querschnitte

Die Druckverteilung an kegeligen Körpern, die bezüglich der Ebene $\zeta = 0$ unsymmetrisch sind, zeigt Bild 6. Für einen Kegel mit dreieckigem Querschnitt (Eckenwinkel $\vartheta = 30^\circ$, flache Unterseite, Seitenverhältnis $\lambda = 1,33$, Machzahl $Ma = 4$) ist der auftriebsabhängige Teil der Druckverteilung nach Messungen von L.C. Squire [27] aufgetragen. Bei diesen Messungen war die Vorderkante eine Uberschallvorderkante. Obwohl unter diesen Umständen die Vereinfachung der Potentialgleichung (1) nicht mehr zulässig ist, sind theoretische Druckverteilungen nach der Theorie schlanker Körper zum Vergleich mit eingetragen. Es ergibt sich, daß der auftriebsabhängige Anteil der Druckverteilung auch bei einer starken Verletzung der Schlankheitsbedingung durch die Theorie schlanker Körper noch recht gut wiedergegeben wird.

Um zu zeigen, daß sich das vorliegende Verfahren auf beliebige Querschnittsformen anwenden läßt, wurde für Beispielrechnungen ein kegeliger Körper mit "Flugzeug"-Querschnitt gewählt, wie er für Überschallflugzeuge nach Bild 1 typisch ist. Die Gleichung der Kontur $\zeta_K(\eta_K)$ in der Ebene $x = \text{konst}$ wurde auf der Oberseite mit

$$\eta_K^2 + (\zeta_K + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{4}{3} \quad (47)$$

und auf der Unterseite mit

$$\zeta_K = -\frac{2}{3\pi} \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\eta_K\right) \quad (48)$$

angenommen. Der Eckenwinkel beträgt $\vartheta = 45^\circ$. Die nach der Theorie schlanker Körper berechnete Druckverteilung an einem derartigen Kegel (Seitenverhältnis $\lambda = 1,0$, Machzahl $Ma = 2,0$) ist für einige Anstellwinkel in Bild 6 dargestellt. Messungen an diesem Kegel fehlen bisher.

Die Berechnung der Druckverteilung an einem Körper mit beliebigem Querschnitt

läßt sich nach dem vorliegenden Verfahren mit dem gleichen Aufwand wie für Körper mit elliptischem, bikonvexem oder rhombischem Querschnitt durchführen.

4.2 Nichtkegeliger Körper

Von D.H. Peckham [28] wurde bei inkompressibler Strömung die Druckverteilung an zwei angestellten Körpern mit dem Seitenverhältnis $\lambda = 1,0$ gemessen, die verschiedene Dickenverteilungen und bezüglich $\eta = 0$ und $\zeta = 0$ symmetrische Querschnitte besitzen. Für einen dieser Körper wurde von J.L. Hess, A.M.O. Smith [11] die Druckverteilung beim Anstellwinkel $\alpha = 0^\circ$ als exakte Lösung der linearisierten Potentialgleichung (1) bei $Ma = 0$ berechnet. Da somit für diesen Körper gute Vergleichsmöglichkeiten mit einer anderen Theorie und mit Messungen bestehen, wurde dieser Körper für die Beispielrechnungen nach dem vorliegenden Verfahren gewählt.

4.21 Geometrie

Bild 7 zeigt eine Übersicht über diesen nichtkegeligen Körper. Die Gleichung der Körperoberfläche lautet

$$z_K(\xi, \eta) / \lambda = \pm 0,24(1-\xi) \left(1 - \frac{1-\xi}{1-\eta^2}\right). \quad (49)$$

Für einige Stellen ξ sind in Bild 7 die in den Ebenen $\xi = \text{konst}$ vorhandenen Querschnittsformen eingezeichnet. Die Querschnitte besitzen bei $y=0$ und an der Vorderkante $y=y_1(x)$ Ecken. Für den Querschnittsverlauf $f(\xi)$ und seine Ableitungen ergibt sich im vorliegenden Fall

$$\frac{1}{\lambda^2} f(\xi) = 0,24\xi(1-\xi) \left[1 + \frac{1-\xi}{\xi} \ln(1-\xi)\right] \quad (50)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{df}{dx}(\xi) = 0,24 \left[-\xi - 2(1-\xi) \ln(1-\xi)\right] \quad (51)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(\xi) = 0,24 \left[1 + 2 \ln(1-\xi)\right] \quad (52)$$

Diese Funktionen sind in Bild 8 aufgetragen. Der Rotationskörper mit gleichem Querschnittsverlauf nach Gl.(50) (äquivalenter Rotationskörper) ist ebenfalls in Bild 8 dargestellt. Daraus ergibt sich, daß für den vorliegenden Körper die Voraussetzung schwacher Querschnittsänderungen nur im Bereich $0 \leq \xi \leq 0,8$ erfüllt ist. In der Umgebung der Hinterkante ist diese Bedingung verletzt. An der Hinterkante ist df/dx endlich, während $d^2 f/dx^2$ logarithmisch unendlich wird.

Die Singularitätenverteilungen $Q_0(\varphi)$, $G_0(\varphi)$ und $G_\alpha(\varphi)$, die Potentialverteilungen $\Phi_{0K}(\varphi)$ und $\Phi_K^+(\varphi)$ sowie die Geschwindigkeits- und Druckverteilung auf der Kontur wurden in 19 Schnitten $\xi = \text{konst}$ berechnet, die jeweils gleiche Abstände $\Delta\xi = 0,05$ voneinander hatten. Der Raumeinfluß $g(x)$ wurde für $Ma = 0$ aus Gl.(36) und für $Ma = \sqrt{2}$ aus Gl.(37) bestimmt.

4.22 Längsströmungsproblem, $\alpha = 0^\circ$

Für das Längsströmungsproblem, $\alpha = 0^\circ$, ist in Bild 9 die Geschwindigkeitsverteilung

auf der Körperoberfläche bei Unter- und Ueberschallgeschwindigkeit dargestellt. Für die beiden charakteristischen Machzahlen $Ma = 0$ und $Ma = \sqrt{2}$ ist die u-Komponente der Störgeschwindigkeit nach Gl. (8) in Form von Linien gleicher Störgeschwindigkeit

$$\frac{u_K}{U_\infty} = \frac{u_{oK}}{U_\infty} + \frac{u_g}{U_\infty} = \text{konst}$$

in den Flügelgrundriß eingetragen. In beiden Fällen ist der aus dem zweidimensionalen Problem in den Querschnittsebenen $x = \text{konst}$ resultierende Anteil u_{oK}/U_∞ gleich. Der charakteristische Unterschied zwischen der Geschwindigkeitsverteilung bei Unterschall- und Ueberschallströmung kommt allein durch den Raumeinfluß zustande. Die vorliegenden Geschwindigkeitsverteilungen stimmen qualitativ gut mit denen überein, die von F. Keune, K. Oswatitsch [7] für einen ähnlichen Flügel nach der Theorie schlanker, dünner Flügel berechnet worden sind.

Die nach dem vorliegenden Verfahren berechnete Druckverteilung bei $\alpha = 0$ und $Ma = 0$ ist in der rechten Hälfte von Bild 10 dargestellt. In den Flügelgrundriß sind Linien gleichen Drucks (Isobaren) eingetragen. In der linken Hälfte des Bildes ist die exakte Druckverteilung nach J.L. Hess, A.M.O. Smith [11] eingetragen. Diese stimmt sehr gut mit den Druckverteilungsmessungen von D.H. Peckham [28] überein, so daß die Isobaren in der linken Bildhälfte gleichzeitig auch die Messungen repräsentieren. Der Vergleich zeigt, daß die exakte und die gemessene Druckverteilung im Bereich $0 \leq \xi \leq 0,7$ durch die Theorie schlanker Körper sehr gut wiedergegeben wird. Der Druckanstieg zur Hinterkante hin wird von der Theorie schlanker Körper zwar qualitativ richtig, jedoch viel zu groß angegeben. Diese Unterschiede sind im wesentlichen nicht auf Reibungseinflüsse, sondern auf die Verletzung der Schlankheitsbedingung in diesem Teil des Körpers zurückzuführen. Die gleichen Unterschiede wurden in der Nähe der Hinterkante an ähnlichen Körpern auch von J. Weber [6] festgestellt.

4.23 Querströmungsproblem, $\alpha \neq 0^\circ$

In Bild 11 ist die Druckverteilung beim Anstellwinkel $\alpha = 4^\circ$ und bei $Ma = 0$ dargestellt. Im linken Teilbild sind die Isobaren der Unterseite und im rechten Teilbild die der Oberseite in Form von Linien gleicher Druckdifferenz $c_p(\alpha=0) - c_p(\alpha) = \text{konst}$ eingetragen. Die rechte Hälfte jedes Teilbildes zeigt das Ergebnis der Theorie schlanker Körper, während in der jeweiligen linken Hälfte die Ergebnisse der Messungen von D.H. Peckham [28] eingetragen sind. Der Vergleich ergibt für Ober- und Unterseite gute Uebereinstimmung zwischen Theorie und Messungen. In der Nähe der Hinterkante sind wieder gewisse Abweichungen festzustellen, welche auf die beim Längsströmungsproblem genam-

ten Gründe zurückzuführen sind. Wie bei den kegeligen Körpern ergibt sich auch hier, daß das Längsströmungsproblem gegenüber Verletzungen der Schlankheitsbedingung wesentlich empfindlicher ist als das Querströmungsproblem.

4.24 Gesamtbeiwerte

Die Ergebnisse der Dreikomponentenmessung von D.H. Peckham [28] sind in Bild 12 dargestellt. Zum Vergleich sind die bekannten Ergebnisse der Theorie schlanker Flügel von R.T. Jones [3] für den Auftrieb

$$c_A = \frac{\pi}{2} \lambda \alpha \quad (53)$$

und für das Nickmoment

$$c_M = -\frac{\pi}{8} \lambda \alpha \quad (54)$$

eingetragen. Auftrieb und Nickmoment sind bei einem dicken Körper kleiner als bei einem dünnen Flügel mit gleicher Grundrißform. Die Gesamtbeiwerte für Auftrieb und Nickmoment nach dem vorliegenden Verfahren geben bei kleinen Anstellwinkeln gut wieder. Beim auftriebsabhängigen Widerstand sind zwei theoretische Kurven nach G.N. Ward [14] eingetragen, und zwar

$$c_W - c_{W0} = c_A \cdot (\alpha/2) \text{ mit Saugkraft (55)}$$

$$c_W - c_{W0} = c_A \cdot \alpha \text{ ohne Saugkraft. (56)}$$

Der Vergleich mit den Messungen zeigt, daß durch lokale Strömungsablösungen an den Vorderkanten (vgl. Bild 10, Oberseite) ein Teil der Saugkraft verloren geht.

5. Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren zur Berechnung der Druckverteilung sowie der Gesamtkräfte und -momente an Flügeln mit endlicher Dicke und kleinen Seitenverhältnissen nach der Theorie schlanker Körper angegeben. Bei diesem Verfahren wird das zugehörige zweidimensionale Problem in der Querschnittsebene mit Hilfe von Wirbel- und Quellverteilungen auf der Kontur gelöst. Es werden beliebige Querschnittsformen mit abgerundeten und scharfen Kanten behandelt. Der Einfluß der Machzahl wird bestimmt, indem die vollständige linearisierte Potentialgleichung für den äquivalenten Rotationskörper für Unter- und Ueberschallströmung gelöst wird. Damit steht ein universelles Verfahren für Körper mit beliebiger Grundriß- und Querschnittsform zur Verfügung, dessen einzige Einschränkung die ist, daß die Körper schlank sein müssen.

Das Verfahren wurde auf die Ueberschallströmung um kegelige Körper beliebiger Querschnitte sowie auf die Unter- und Ueberschallströmung um einen nichtkegeligen Körper angewandt. Die Ergebnisse wurden mit anderen Theorien und mit Messungen verglichen. Dabei ergab sich, daß die aus der Längsströmung ($\alpha = 0$) herrührenden Anteile der Druckverteilung nur bei sehr schlanken Körpern gut mit Messungen übereinstimmen. Die nach dem vorliegenden Ver-

fahren berechneten Druckverteilungen stimmen in der Umgebung von Ecken besser mit den Messungen überein als die entsprechenden Ergebnisse nach der linearisierten Theorie dünner Flügel und der Theorie schlanker dünner Flügel. Die Ergebnisse für das Querströmungsproblem ($\alpha \neq 0$) sind weniger empfindlich gegenüber Verletzungen der Schlankheitsbedingung. Die aus dem Querströmungsproblem herrührenden Anteile der Druckverteilung sowie auch die Gesamtwerte stimmen im allgemeinen gut mit Messungen überein.

6. Literatur

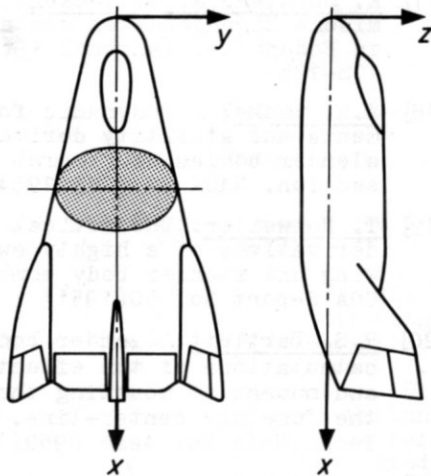
- [1] D. Isaacs: Measurements at subsonic and supersonic speeds of the longitudinal and lateral stability of a slender cambered ogee wing including the effects of a fin, canopy nose and trailing edge controls. R.A.E. Report Aero 2679(1963)
- [2] H. Schlichting, E. Truckenbrodt: Aerodynamik des Flugzeugs. Band 1, 2. Aufl. (1967), Band 2, 1. Aufl. (1960); Verlag Springer Berlin, Göttingen, Heidelberg
- [3] R.T. Jones: Properties of low-aspect ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound. NACA TN 1032(1946)
- [4] F. Keune: Low aspect ratio wings with small thickness at zero lift in subsonic and supersonic flow. KTH-Aero TN 21(1952)
- [5] E. Eminton: Pressure distributions at zero lift for delta wings with rhombic cross-sections. A.R.C. C.P. 525(1960)
- [6] J. Weber: Slender delta wings with sharp edges at zero lift. R.A.E. TN Aero 2508(1957)
- [7] F. Keune, K. Oswatitsch: Nicht angeordnete Körper kleiner Spannweite in Unter- und Uberschallströmung. Z. Flugwiss. 1(1953), 137-145
- [8] W.T. Lord, G.G. Brebner: Supersonic flow past slender pointed wings with "similar" cross-sections at zero lift. Aeron. Quarterly 10(1959), 79-102
- [9] K. Gersten: Berechnung der Uberschallströmung um nichtangestellte schlanke Flügel. ZAMM 43(1963), T. 130-132
- [10] K. Maruhn: Druckverteilungsrechnung an elliptischen Rümpfen und in ihrem Außenraum. Jahrb. d. deutschen Luftfahrtforschung 1941, 135-147
- [11] J.L. Hess, A.M.O. Smith: Calculation of potential flow about arbitrary bodies. Progress in Aeronautical Sciences (Herausgeber: D. Küchemann), Vol. 8(1967), 1-138. Pergamon Press Oxford, London, New York
- [12] F. Keune: Singularitätenverfahren zur Berechnung der Strömung um mäßig dicke Flügel endlicher Spannweite. Z. Flugwiss. 2(1954), 253-259
- [13] M.C.P. Firmin: The pressure distribution at zero-lift on some slender delta wings at supersonic speeds. A.R.C. C.P. 774 (1964)
- [14] G.N. Ward: Supersonic flow past slender pointed bodies. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 2(1949), 75-97
- [15] L.E. Fraenkel: Supersonic flow past slender bodies of elliptic cross section. A.R.C. R.u.M. 2954(1955)
- [16] A. Kahane, A. Solarski: Supersonic flow about slender bodies of elliptic cross section. J. Aeron. Sci. 20(1953), 513-524
- [17] K. Gersten, J. vd. Decken: Aerodynamische Eigenschaften schlanker Flügel in Bodennähe. Jahrbuch 1966 der WGLR, 108-125
- [18] A.H. Sacks: Aerodynamic forces, moments and stability derivatives for slender bodies of general cross section. NACA TN 3283(1954)
- [19] T. Nonweiler: Theoretical stability derivatives of a highly swept delta wing and slender body combination. COA Report No. 50(1951)
- [20] R.S. Bartlett: Slender body theory calculations of the effect on lift and moment of mounting the wing off the fuselage center-line. R.A.E. Techn. Note No. Aero 2950(1964)
- [21] J.W. Britton: Pressure measurements at supersonic speeds on three uncambered conical wings of unit aspect ratio. A.R.C. C.P. No. 641(1963)
- [22] R. S. Skulsky: A conformal mapping method to predict low-speed aerodynamic characteristics of arbitrary slender re-entry shapes. J. Spacecraft Rockets 3(1966), 247-253
- [23] J.C. Cooke: Slender not-so-thin wing theory. A.R.C. C.P. 659(1963)
- [24] E. Martensen: Die Berechnung der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholm'schen Integralgleichungen zweiter Art. Mitteilungen aus dem M.P.I. für Strömungsforschung und der AVA Göttingen Nr. 23 (1959)
- [25] P. Pal: Untersuchungen über den Interferenzeinfluß bei Strömungen durch Tandem-Schauflergitter. Ing. Arch. 34 (1965), 173-193
- [26] Mac C. Adams, W.R. Sears: Slender body theory - Review and extension. J. Aeron. Sci. 20(1953), 85-98
- [27] L.C. Squire: Pressure distributions at $M = 4,0$ on some 'flat' delta wings. R.A.E. TN No. Aero 2865(1963)

[28] D.H. Peckham: Low-speed wind-tunnel tests on a series of uncambered slender pointed wings with sharp edges. A.R.C. R.u.M. 3186(1961)

[29] D. Hummel: Berechnung der Druckverteilung an schlanken Flugkörpern mit beliebiger Grundriß- und Querschnittsform in Unter- und Ueberschallströmung. Dissertation T.U. Braunschweig, 1968. Bericht 68/1 des Instituts für Strömungsmechanik der T.U.Braunschweig

a) Hyperschallflugkörper
(Raumgleiter)

Beispiel: Martin-Marietta SV-5P

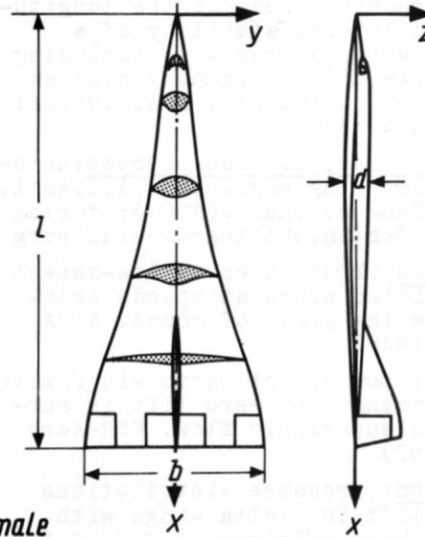


Kennzeichnende Merkmale

- 1.) Kleines Seitenverhältnis, $\Lambda \leq 1,5$
- 2.) Sehr große Dicke
- 3.) Abgerundete Vorderkanten

b) Überschallflugkörper
(schlanke Überschallflugzeuge)

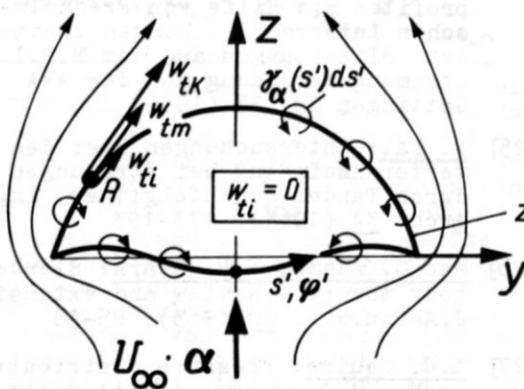
Beispiel: RAE-Entwurf



- 1.) Kleines Seitenverhältnis, $\Lambda \leq 1,5$
- 2.) Relativ große Dicke
- 3.) Zugeschärfte Vorderkanten

Bild 1: Beispiele für schlanke, dicke Flugkörper

a) Querströmungsproblem



b) Längsströmungsproblem

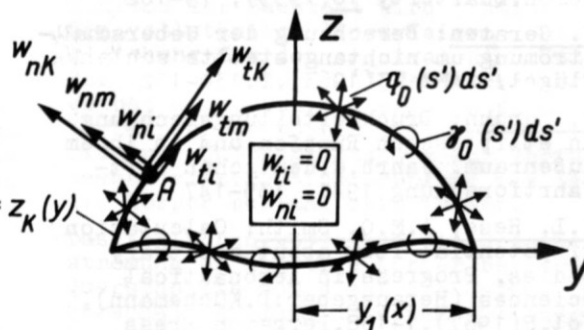


Bild 2: Singularitätenverfahren zur Lösung des zweidimensionalen Problems

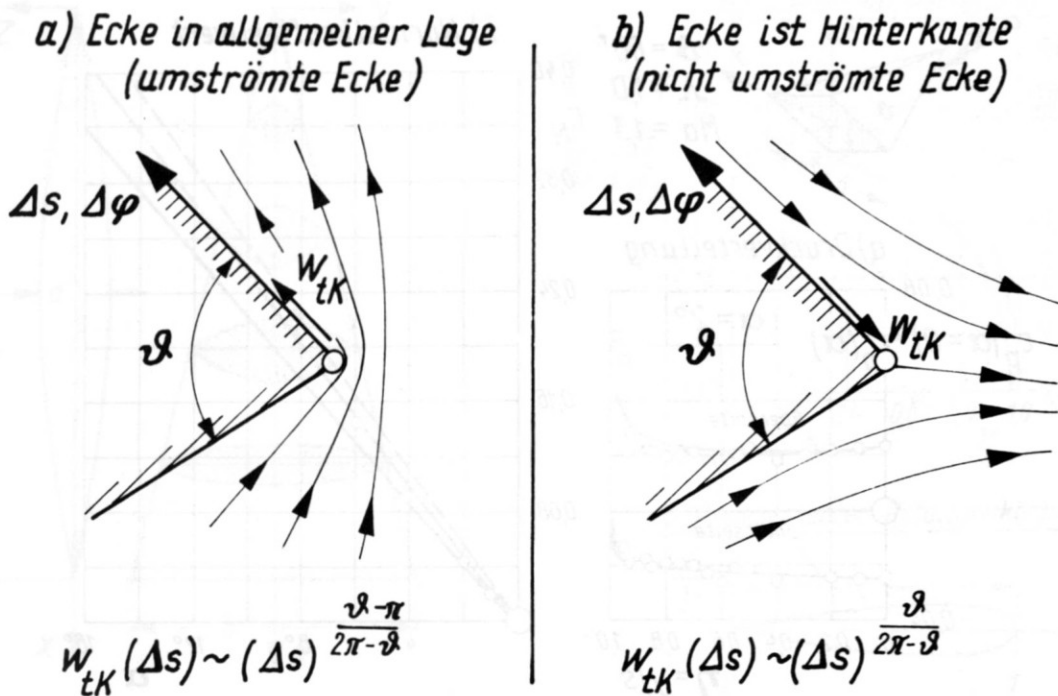


Bild 3: Zweidimensionale Geschwindigkeitsverteilungen in der Umgebung von Ecken

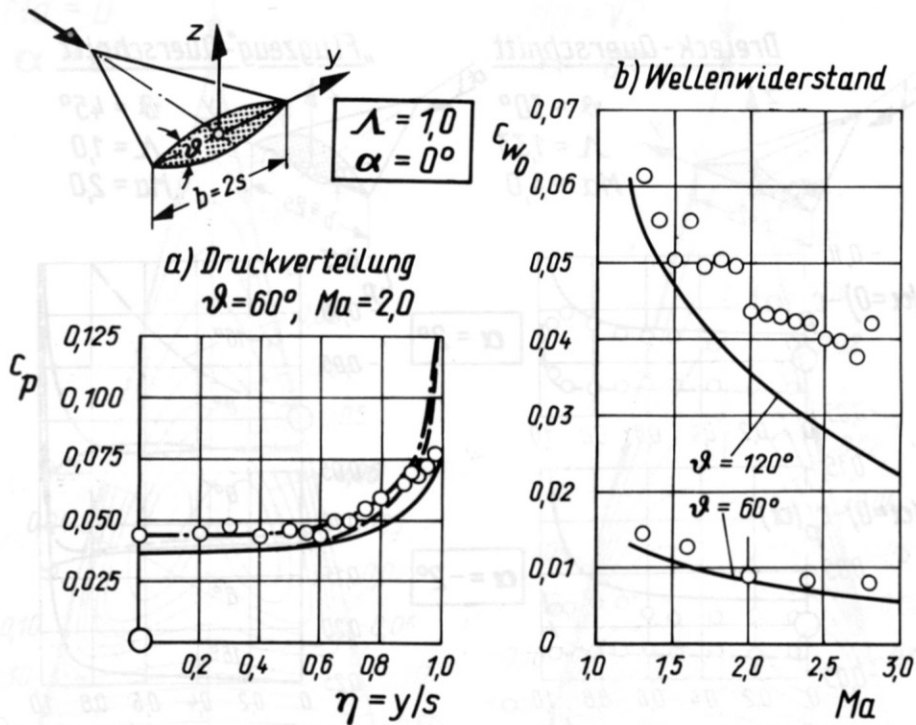


Bild 4: Druckverteilung und Wellenwiderstand an Kegeln mit bikonvexen Querschnitten

○ Messung nach Britton | - - - Theorie schlanker, dünner Körper
 - · - · Theorie dünner Körper | — Theorie schlanker, dicker Körper

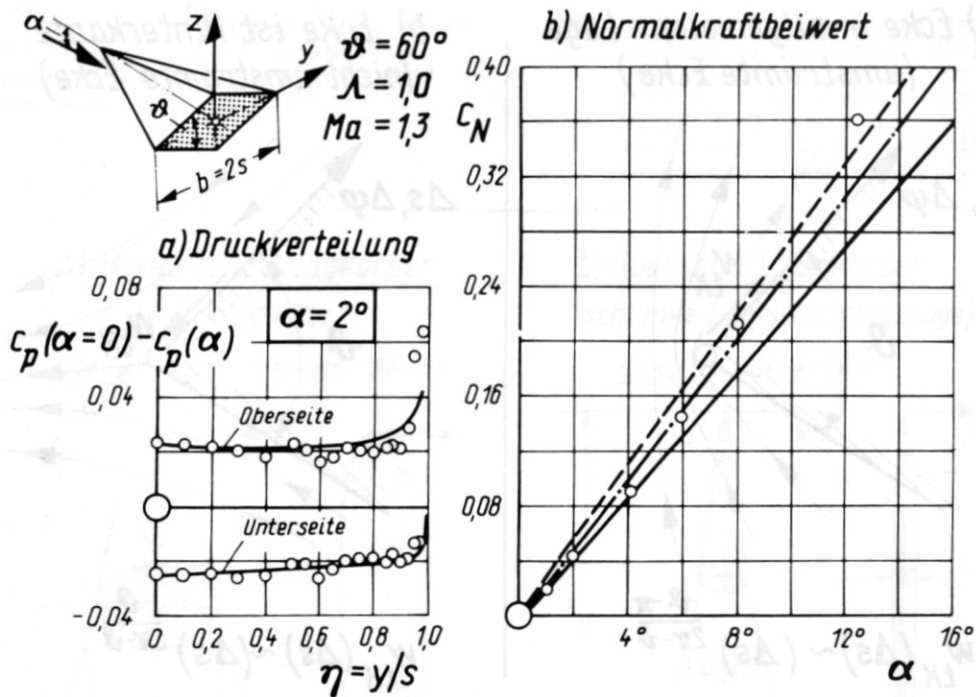


Bild 5: Druckverteilung und Normalkraft an einem rhombischen Kegel

○ Messung nach Britton | --- Theorie schlanker Flügel
 - - - Theorie dünner Flügel | — Theorie schlanker, dicker Körper

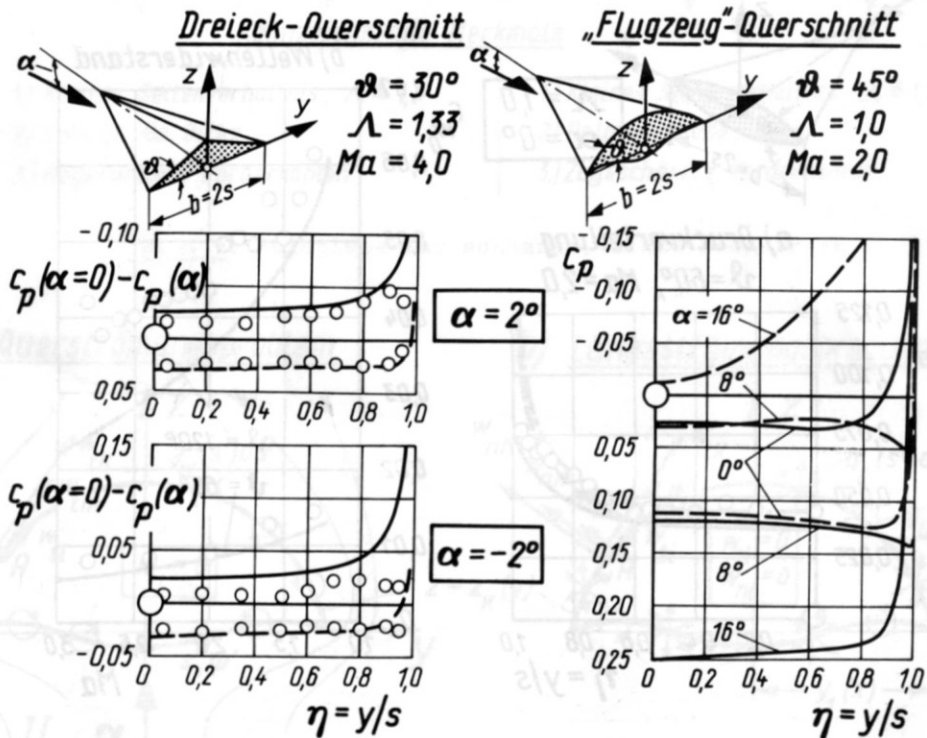


Bild 6: Druckverteilung an kegeligen Körpern mit verschiedenen Querschnitten

Theorie schlanker Körper: --- Oberseite | ○ Messung nach Squire
 — Unterseite

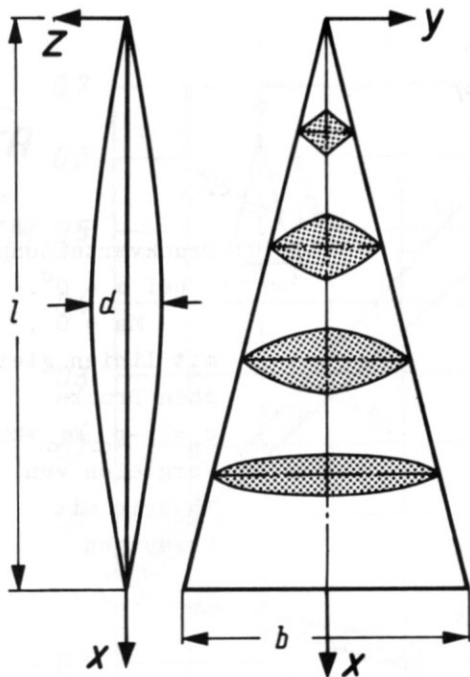
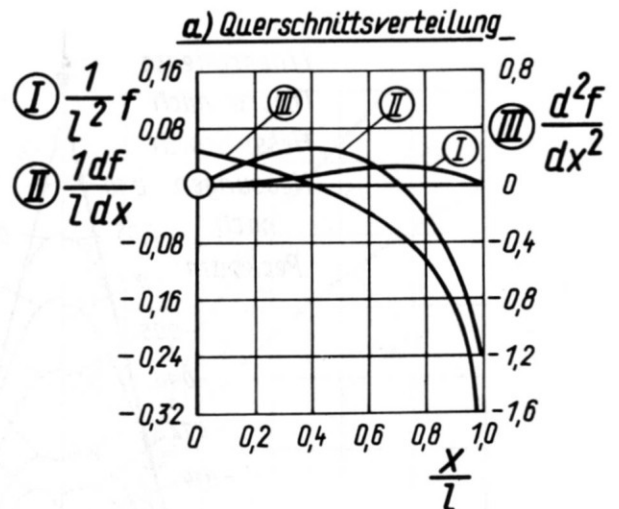


Bild 7: Nicht kegeliger Körper
($\lambda = 1,0$; $d/l = 0,12$),
Übersicht



b) Äquivalenter Rotationskörper

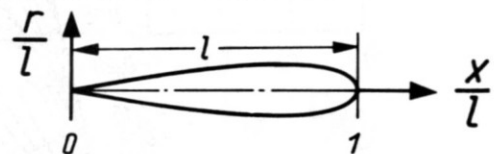


Bild 8: Nicht kegeliger Körper. Quer-
schnittsverlauf und äquivalenter
Rotationskörper

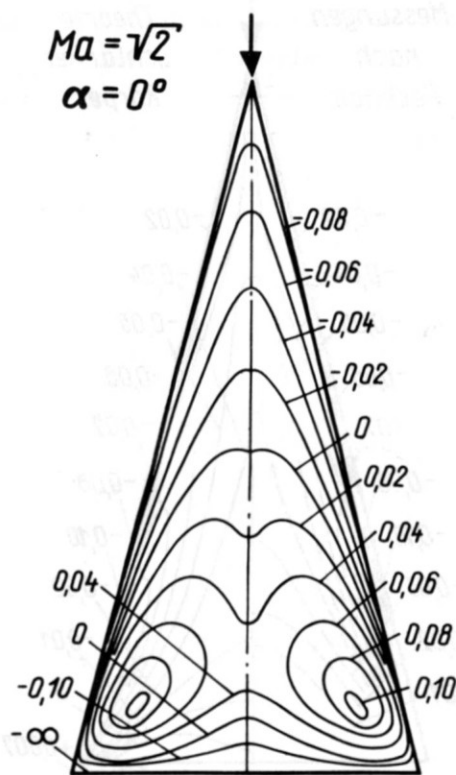
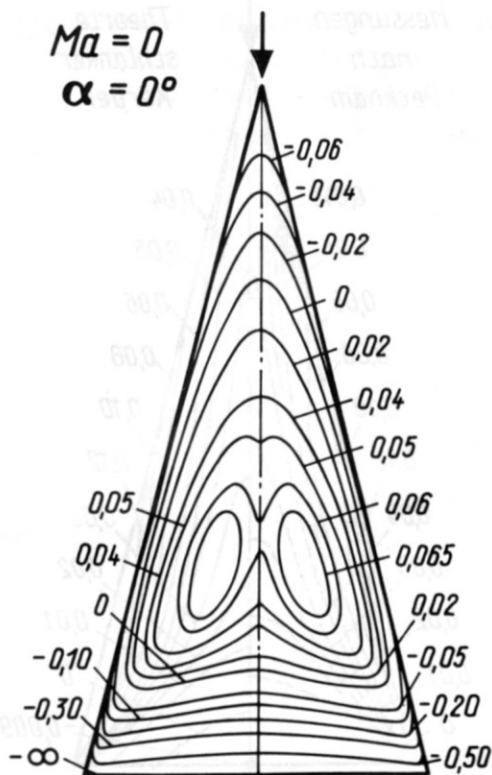


Bild 9: Geschwindigkeitsverteilung auf der Körperoberfläche mit Linien
gleicher Störgeschwindigkeit $(u_K/U_\infty) = (u_{oK}/U_\infty) + (u_g/U_\infty) = \text{konst}$
bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit

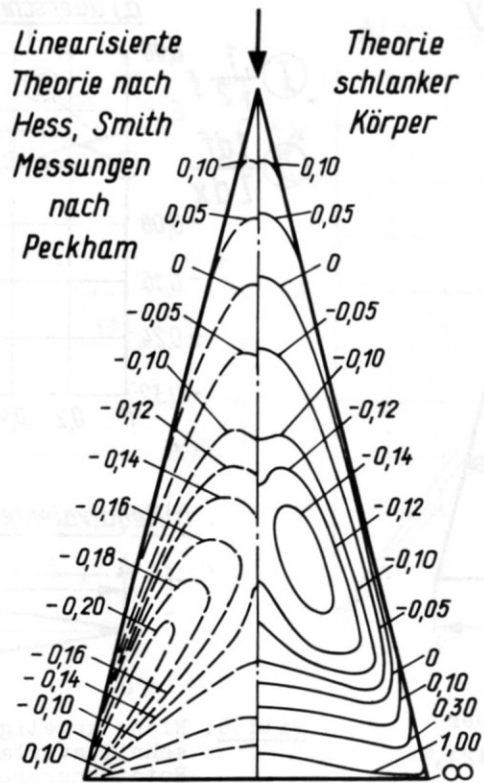


Bild 10: Druckverteilung bei $\alpha = 0^\circ$, $Ma = 0$, mit Linien gleichen Drucks $c_p = (p - p_\infty) / q_\infty = \text{konst}$ Vergleich von Theorie mit Messungen

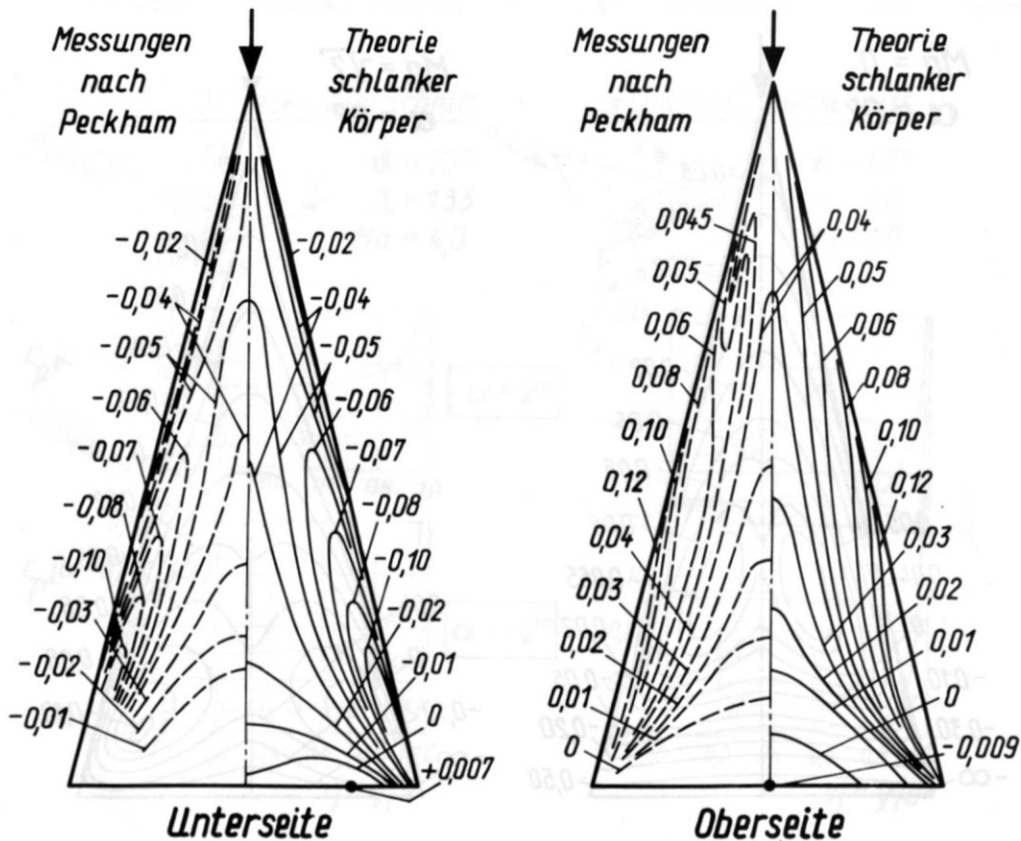
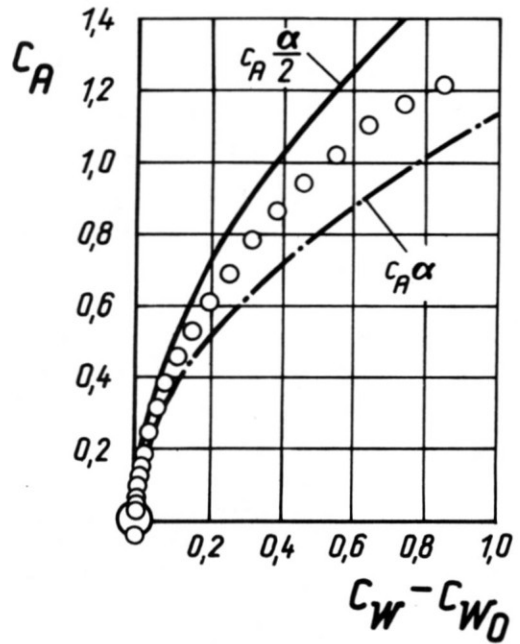
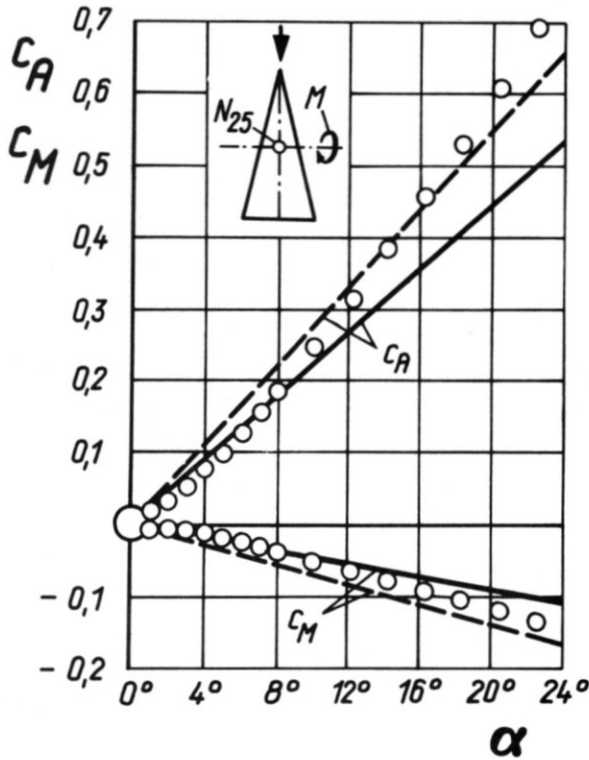


Bild 11: Druckverteilung bei $\alpha = 4^\circ$, $Ma = 0$ mit Linien gleicher Druckdifferenz $\Delta c_p = c_p(\alpha = 0) - c_p(\alpha) = \text{konst}$. Vergleich von Theorie mit Messungen

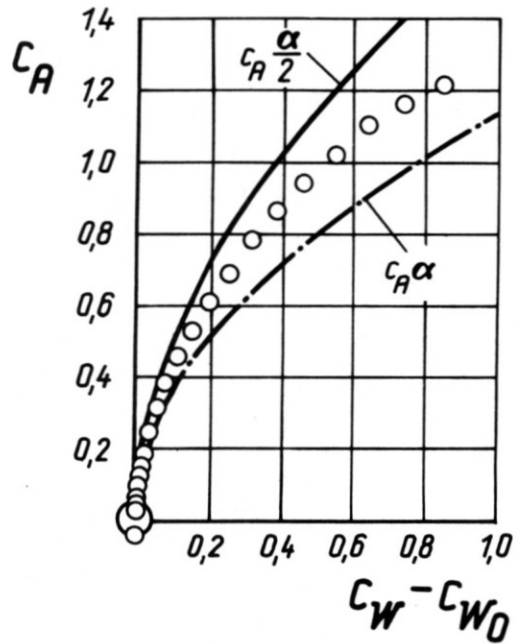
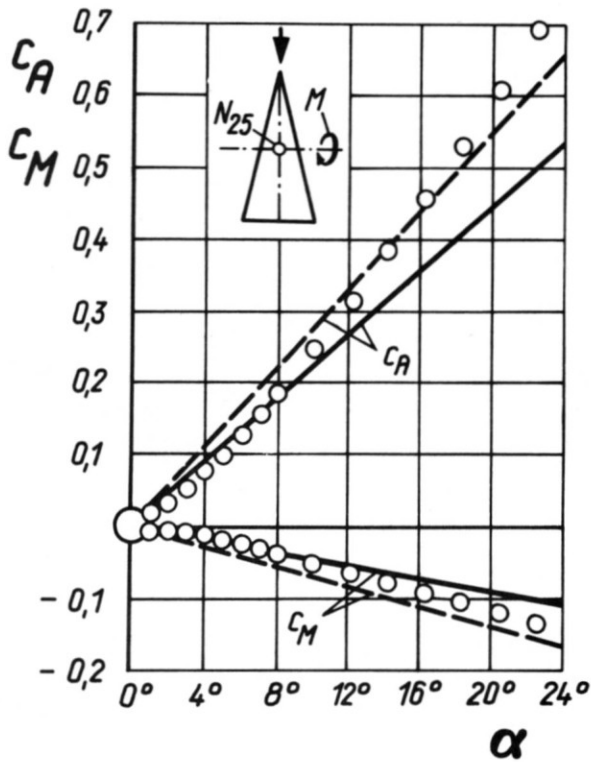


Seitenverhältnis $\lambda = 1,0$
 Dicke des Körpers $d/l = 0,12$

Bild 12: Auftrieb, Nickmoment, Widerstand. Vergleich von Theorie mit Messungen

○ Messung Peckham
 --- Theorie schlanker dünner Flügel (R.T. Jones)

Theorie schlanker Körper
 — mit Saugkraft
 - - - ohne Saugkraft



Seitenverhältnis $\lambda = 1,0$
 Dicke des Körpers $d/l = 0,12$

Bild 12: Auftrieb, Nickmoment, Widerstand. Vergleich von Theorie mit Messungen

○ Messung Peckham
 --- Theorie schlanker dünner Flügel (R.T. Jones)

Theorie schlanker Körper
 — mit Saugkraft
 - - - ohne Saugkraft