

ICAS Paper No. 68-41

GROUND AREA REACHABLE BY AN ORBITAL LIFTING  
VEHICLE RE-ENTERING THE ATMOSPHERE

by

Jean Fave  
Office National d'Etudes et de Recherches  
Aerospatiales (ONERA)  
Chatillon, France

# **The Sixth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences**

DEUTSCHES MUSEUM, MÜNCHEN, GERMANY/ SEPTEMBER 9-13, 1968

Preis: DM 2.00



DOMAINE ACCESSIBLE AU SOL PAR UN PLANEUR ORBITAL  
RENTRANT DANS L'ATMOSPHERE

J. FAVE

O.N.E.R.A. - (92) Châtillon - France

Abstract

The modulation of the angle-of-attack and of the bank angle enables an orbital re-entry glider to reach any point within a set of points which forms a footprint on the ground. Optimal paths leading to points located on the boundary of this footprint are obtained by using a modified gradient method from which can be defined the control laws, even along the less sensitive arcs. A parametric study shows that the maximum lateral range is strongly dependent upon the lift-to-drag ratio, and slightly dependent upon the ballistic coefficient and the characteristics of the re-entry orbit. This optimization provides a 15 % improvement with respect to the approximate analytical results. Two complete footprints are drawn with two wing-load values, for a 1.0 lift-to-drag ratio glider, and their limitations due to heat constraints are indicated. A maximum heating rate constraint (for a re-radiating structure) leads to a small decrease of the reachable domain on the ground, for low wing-load gliders only.

Résumé

Le choix de l'incidence de vol et de l'angle de roulis permet à un planeur orbital de suivre une infinité de trajectoires et d'atteindre au sol tout un ensemble de points qui constituent son domaine accessible. Les trajectoires optimales conduisant à des points situés sur la frontière de ce domaine sont calculées en utilisant une version améliorée de la méthode du gradient, qui permet de préciser les lois de commande, même le long des arcs où elles sont le moins efficaces. Une étude paramétrique montre que la portée latérale maximum dépend directement de la finesse du planeur, et faiblement de son coefficient balistique et des caractéristiques de l'orbite de rentrée. Cette optimisation fournit une amélioration de 15 % par rapport à des résultats analytiques approchés. Deux domaines complets sont tracés, relatifs à deux valeurs de la charge alaire, pour un planeur de finesse 1, et leurs limitations dues à des contraintes thermiques sont indiquées. Une limitation des flux de chaleur (pour une structure rayonnante) ne conduit à une faible réduction du domaine que pour les planeurs de faible charge alaire.

Notations

a, b	coefficients de l'indice de performance
$C_x, C_z$	coefficients aérodynamiques
$C_q, C'_q$	coefficients de transmission de chaleur
$f_{max}$	finesse maximum
g	accélération de la pesanteur
i	incidence
J	indice de performance

L	longitude
m	masse du planeur
$p_k$	composantes du vecteur adjoint
q	quantité de chaleur
$\dot{q}$	flux de chaleur
$\dot{Q}$	flux maximum au cours de la rentrée
r	rayon vecteur
R	rayon de courbure
S	surface de référence
t	temps
V	vitesse
z	altitude (= $r - r_0$ )
$z_A, z_P$	altitudes de l'apogée et du périégée de l'orbite de rentrée
$\gamma$	pente (négative si l'altitude diminue)
$\varphi$	latitude
$\mu$	angle de roulis aérodynamique
$\chi$	azimut (origine au Nord, positif à l'Est)
$\rho$	masse spécifique de l'air
$\sigma$	variable de pénalisation
$\omega$	vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même

Indices

o	relatif à l'altitude zéro
E	relatif à l'entrée dans l'atmosphère
f	relatif au point final

I. Introduction

La trajectoire suivie par un véhicule planeur rentrant dans l'atmosphère dépend de la loi de pilotage choisie fixant, à chaque instant, l'orientation dans l'espace de la résultante des forces aérodynamiques. Placé sur une orbite de rentrée donnée, un planeur peut donc atteindre, à la surface du sol, tout un ensemble de points, délimité par une courbe qui est la frontière de son domaine accessible. La détermination de ce domaine est intéressante, car elle montre l'avantage des manoeuvres aérodynamiques, interdites à un véhicule balistique, et fixe en même temps les performances optimales permises à un planeur de caractéristiques données.

En particulier, dans une rentrée orbitale, l'écart latéral atteint au sol par un planeur maintenu à un angle de roulis  $\mu$  constant (loi non optimale) est maximum pour  $\mu = 45^\circ$ , et vaut 1 200 km environ pour un planeur de finesse maximum égale à 1.

Cette distance latérale a été évaluée par SLYE<sup>(1)</sup> avec les hypothèses de l'équilibre des forces verticales et de la terre plate pour les manœuvres latérales. Avec ces mêmes hypothèses, mais en utilisant une modulation de la loi de roulis  $\mu(t)$  l'optimisation, conduite sous forme analytique<sup>(2)</sup>, donne un écart latéral supérieur de 10 %, grâce à un angle de roulis décroissant au cours de la rentrée de 90° à 0. Pour rendre compte des ricochets possibles du planeur sur l'atmosphère, le mouvement doit être représenté par des équations plus complètes, et l'optimisation des trajectoires ne peut plus être obtenue que par un procédé numérique itératif<sup>(3)</sup>.

La méthode utilisée ici est dérivée de la méthode du gradient ; elle permet une amélioration accrue de l'indice de performance et surtout une convergence plus rapide vers les lois de commande optimales, même le long des arcs les moins sensibles<sup>(4)</sup>. Elle a été appliquée à un système d'équations autorisant des trajectoires rebondissantes. De plus, les charges thermiques auxquelles est soumis le planeur sont prises en compte de façon simplifiée, permettant ainsi d'indiquer les limitations du domaine accessible selon les contraintes imposées par le mode de protection thermique envisagée.

## II. Hypothèses et équations

Le mouvement du planeur est représenté avec les hypothèses suivantes :

a) la Terre est supposée sphérique : le champ de pesanteur est un champ central. Dans ces conditions, la rotation de la Terre sur elle-même, lorsqu'elle est prise en compte, est représentée par le seul terme d'accélération d'inertie de Coriolis. La masse spécifique de l'atmosphère est supposée régir par la loi :

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta z}$$

en fonction de l'altitude.

b) le planeur vole sans dérapage. Les vecteurs vitesse du mouvement et résultante aérodynamique sont alors situés dans le plan de symétrie du planeur. La résultante ne dépend plus, en chaque point de la trajectoire, que de deux paramètres de commande :

- l'incidence de vol  $i$  qui fixe le vecteur résultante dans ce plan de symétrie, par l'intermédiaire des coefficients aérodynamiques  $C_x$  et  $C_z$ . La polaire est supposée parabolique (Fig 1), l'incidence de finesse maximum étant égale à 20°. Le choix de l'incidence est limité par des bornes :

$$0^\circ \leq i(t) \leq 40^\circ$$

l'incidence maximum prévenant les phénomènes gênants de grande incidence et l'incidence minimum pouvant être imposée par le mode de protection thermique envisagé.

Nota : les mouvements transitoires autour du centre de gravité sont négligés, l'équilibre des moments étant supposé réalisé à chaque instant.

- l'angle de roulis aérodynamique  $\mu$  qui achève la détermination de la résultante aérodynamique en fixant l'angle entre le plan de symétrie du planeur (contenant le vecteur vitesse  $\vec{V}$ ) et le plan vertical passant par  $\vec{V}$ . Le choix de  $\mu$  est également limité par des bornes :

$$-90^\circ \leq \mu(t) \leq +90^\circ$$

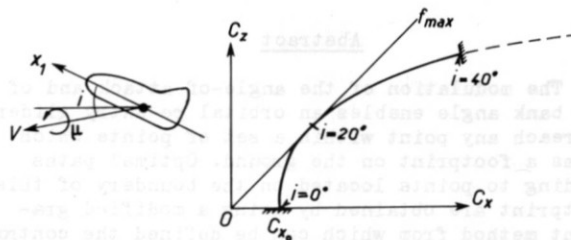


Figure 1. Paramètres de commande : incidence et angle de roulis

Le planeur est repéré par ses coordonnées géographiques (latitude  $\Phi$ , longitude  $L$  et rayon vecteur  $r$ ), et le vecteur vitesse par son module  $V$ , sa pente  $\gamma$  (positive si  $\vec{V}$  est au-dessus du plan horizontal) et son azimut  $\chi$  par rapport au Nord (positif à l'Est).

Dans ces conditions, les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{g_0 r_0^2}{r^2} \sin \gamma - \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{C_x}{m} \\ \dot{\gamma} &= -\frac{g_0 r_0^2}{r^2} \frac{\cos \gamma}{V} + \frac{1}{2} \rho V \frac{C_z}{m} \cos \mu + \frac{V}{r} \cos \gamma + 2\omega \sin \chi \cos \Phi \\ \dot{\chi} &= \frac{1}{2} \rho V \frac{C_z}{m} \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} + \frac{V}{r} \cos \gamma \sin \chi \operatorname{tg} \Phi + 2\omega (\sin \Phi - \cos \Phi \cos \chi \operatorname{tg} \gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V \sin \gamma \\ \dot{\Phi} &= \frac{V}{r} \cos \chi \cos \gamma \\ \dot{L} &= \frac{V}{r} \frac{\sin \chi \cos \gamma}{\cos \Phi} \end{aligned}$$

Le système (1) doit être complété par l'équation différentielle (1'), évaluant de façon très simplifiée la quantité de chaleur  $q$  par unité de surface, reçue par convection au voisinage d'un point d'arrêt :

$$\dot{q} = \frac{C_q}{\sqrt{R}} \sqrt{\rho} V^3 \quad (1')$$

où  $R$  est le rayon de courbure dans la zone d'arrêt, et  $C_q$  un coefficient dépendant de l'atmosphère.

A titre indicatif, le flux par unité de surface en un point de l'intrados peut être évalué de façon également très simplifiée par la formule :

$$\dot{q}_{intrados} = \frac{C'_q}{\sqrt{x}} \sqrt{\rho} V^3 \sin(i+\alpha) \sqrt{\cos(i+\alpha)}$$

pour un planeur en forme de demi-cône de révolution de demi-angle au sommet  $\alpha$ . Le flux à l'intrados se déduit donc du flux en un point d'arrêt, compte tenu de l'incidence de vol, et des constantes retenues :

$$C_q = 1,705 \cdot 10^{-7} \text{ kJ} - \text{s}^2/\text{kg}^{\frac{1}{2}} - \text{m}^3 \quad R = 0,5 \text{ m}$$

$$C'_q = 1,55 \cdot 10^{-7} \text{ kJ} - \text{s}^2/\text{kg}^{\frac{1}{2}} - \text{m}^3 \quad x = 1 \text{ m}$$

### III. Optimisation des trajectoires

A chaque instant, l'évolution du mouvement est décrite par le système (1) et dépend de l'incidence  $i$  (fixant  $C_x$  et  $C_z$  par l'intermédiaire de la polaire) et de l'angle de roulis  $\mu$ , qui peuvent être choisis dans les intervalles permis par les bornes. Placé sur une orbite de rentrée donnée (donc pour des valeurs initiales  $V_E, \gamma_E, \chi_E, r_E, \psi_E, L_E, q_E$  fixées), la trajectoire suivie par un planeur de caractéristiques données ( $C_x, f_{max}, m, S, R$  fixées) dépend des lois  $i(t)$  et  $\mu(t)$  choisies. Le faisceau des trajectoires possibles à partir du point initial découpe sur la sphère terrestre le domaine accessible par le planeur. Les trajectoires atteignant au sol un point  $(L_f, \psi_f)$  de la courbe frontière de ce domaine sont des trajectoires optimales, puisqu'elles indiquent les performances limites du planeur. En particulier, à tout vecteur  $OC$  ( $a, b$ ) dans le plan  $(L, \psi)$ , on peut associer l'indice de performance :

$$J = aL_f + b\psi_f = \vec{OC} \cdot \vec{OM}_f$$

qui est maximum (Fig 2) au point de la frontière où la tangente est normale à  $OC$ . La frontière se détermine donc par points et tangentes, en recherchant le maximum de  $J$  pour différents vecteurs  $OC$ .

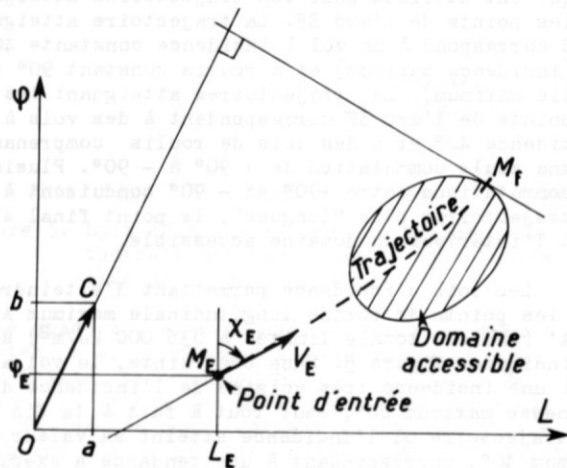


Figure 2. Indice de performance pour la recherche du domaine accessible sur le sol

Cas des contraintes : le mode de protection thermique envisagé peut imposer des limitations de l'échauffement de la structure : limitation de la chaleur totale reçue pour une protection par abla-

tion, limitation du flux maximum reçu pour une protection par rayonnement.

La limitation du flux à une valeur limite ( $\dot{q}(t) \leq \dot{q}_{lim}$ ) conduit à considérer une variable d'état supplémentaire  $\sigma$  telle que :

$$\sigma(t) = 0$$

$$\dot{\sigma} = \epsilon(t) \cdot (\dot{q} - \dot{q}_{lim})^2 \quad (1'')$$

avec

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q}(t) \geq \dot{q}_{lim} \\ 0 & \text{si } \dot{q}(t) < \dot{q}_{lim} \end{cases}$$

Dans ces conditions, la limitation de flux se ramène, comme la limitation de chaleur, à une contrainte finale ( $\sigma_f = 0$ ).

Méthode utilisée : L'optimisation des trajectoires, avec ou sans contraintes, est obtenue ici numériquement par application de la méthode du gradient. Cette méthode consiste à choisir initialement des lois nominales, auxquelles correspondent une trajectoire nominale et une valeur nominale de l'indice de performance, éventuellement pénalisés de la violation des contraintes. A chaque itération, une nouvelle trajectoire est obtenue en modifiant les lois de commande de  $\delta i(t)$  et  $\delta \mu(t)$  dans un voisinage donné des lois précédentes, de façon à obtenir l'augmentation la plus grande de l'indice de performance. La variation de  $J$  est évaluée à l'aide des huit fonctions de sensibilité  $p_k(t)$  de  $J$  à des perturbations  $\delta x_k$  appliquées à un instant quelconque  $t$  aux huit variables d'état :  $V, \gamma, \chi, r, \psi, L, q$  et  $\sigma$ , les lois de commande étant inchangées :

$$\delta J = \sum_{k=1}^8 p_k(t) \cdot \delta x_k$$

Les fonctions  $p_k(t)$  sont solutions du système d'équations différentielles (2) adjointes au système (1) :

$$\dot{p}_k = - \sum_l p_l \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \quad (2)$$

où  $\frac{\partial f_l}{\partial x_k}$  désigne les dérivées partielles des seconds membres  $f_l$  des équations du système (1) par rapport aux variables d'état  $x_k$ , calculées pour la dernière trajectoire obtenue. Les conditions aux limites sont imposées à l'instant final par la forme de l'indice de performance et la condition d'arrêt au sol.

De la même façon, la sensibilité  $P_u$  de  $J$  à une modification  $\delta u$  de l'une des commandes  $i$  ou  $\mu$ , appliquée pendant le temps  $dt$ , est définie par la relation :

$$d\delta J = P_u(t) \cdot \delta u \cdot dt$$

où  $P_u(t)$  se déduit des fonctions  $p_k(t)$  par :

$$P_u(t) = \sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial u} = \vec{P} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u}$$

Le produit scalaire est limité aux sous-vecteurs  $\vec{P}$  et  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}$  dont aucune composante n'est identiquement nulle (trois composantes non nulles dans le cas de la sensibilité à l'incidence  $P_i(t)$  et deux dans le cas de  $P_\mu$ ), les deuxièmes membres  $f_k$  des équations du système (1) ne comprenant pas tous

explicitement les commandes  $i$  et  $\mu$ .

La convergence de la méthode du gradient est améliorée<sup>(4)</sup> en appliquant des modifications  $\delta i(t)$  et  $\delta \mu(t)$  qui ne sont pas proportionnelles (méthode classique) à  $P_i(t)$  et  $P_\mu(t)$ , mais définies par :

$$\delta u(t) = k \cdot \frac{P_u(t)}{|\vec{p}| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|}$$

Cette modification permet d'améliorer les lois de commande, même le long des arcs les moins sensibles, ces faibles sensibilités  $P_u$  étant dues, pour une loi non optimale, aux termes  $|\vec{p}|$  et  $\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|$ .

#### IV. Résultats

##### Paramètres du mouvement

Un choix approprié de variables sans dimension permet de réduire au minimum à trois les paramètres dont dépendent les équations du mouvement :

- la finesse maximum du planeur  $f_{\max}$ ,
- le paramètre  $\rho_0 e^{\beta_0} \cdot \frac{C_{x_0} S}{m}$  qui se ramène au coefficient balistique  $C_{x_0} S/m$  dans le cas de rentrées dans l'atmosphère terrestre,
- la vitesse de rotation de la planète sur elle-même  $\omega$ .

A ces paramètres il faut ajouter les valeurs initiales à l'entrée dans l'atmosphère :  $V_E, \gamma_E, \chi_E, r_E, \varphi_E$ .

Tous les résultats suivants sont présentés dans le cas d'entrées dans l'atmosphère terrestre ( $\rho_0 = 1,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\beta = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ ). La rotation de la Terre sur elle-même a été considérée comme une perturbation dont les effets sont évalués dans quelques cas particuliers. Dans ces conditions, la majeure partie des résultats est relative au cas où  $\omega = 0$ . Dans ce cas, les conditions initiales  $\chi_E, \varphi_E$  sont indifférentes. Les conditions  $V_E, \gamma_E, r_E$  peuvent être remplacées par  $z_A$  et  $z_P$ , les altitudes de l'apogée et du périégée de l'orbite de rentrée, qui sont indépendantes de l'altitude d'entrée dans l'atmosphère. Le mouvement dépend alors de quatre paramètres :  $f_{\max}, C_{x_0} S/m, z_A$  et  $z_P$ .

##### Domaines accessibles à la surface du sol :

Les domaines accessibles par deux planeurs de finesse maximum égale à 1, issus d'une orbite de rentrée caractérisée par  $z_A = +400 \text{ km}$  et  $z_P = -100 \text{ km}$  (soit  $V_E = 7850 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\gamma_E = -2,2^\circ$  à  $z_E = 120 \text{ km}$ ), et dont les coefficients balistiques valent  $10^{-3}$  et  $2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ , sont représentés Fig 3. La portée longitudinale est évaluée, à partir du point d'entrée à 120 km, sur le grand cercle dont le plan contient le vecteur vitesse d'entrée  $\vec{V}_E$ . La portée latérale est comptée sur le grand cercle normal au précédent et passant par le point de chute. L'influence du coefficient balistique se ramène grosso modo à une translation du domaine accessible, traduisant le décalage en altitude des trajectoires équilibrées correspondantes.

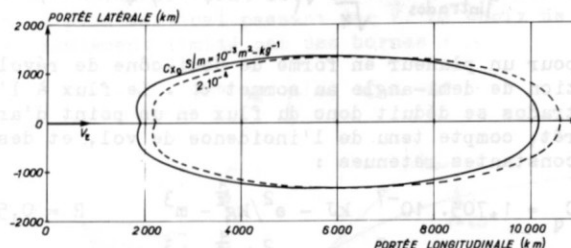


Figure 3. Domaines accessibles à la surface du sol par deux planeurs de finesse 1 et de charges alaires différentes.

Orbite de rentrée :  $z_A = 400 \text{ km}$  ;  $z_P = -100 \text{ km}$

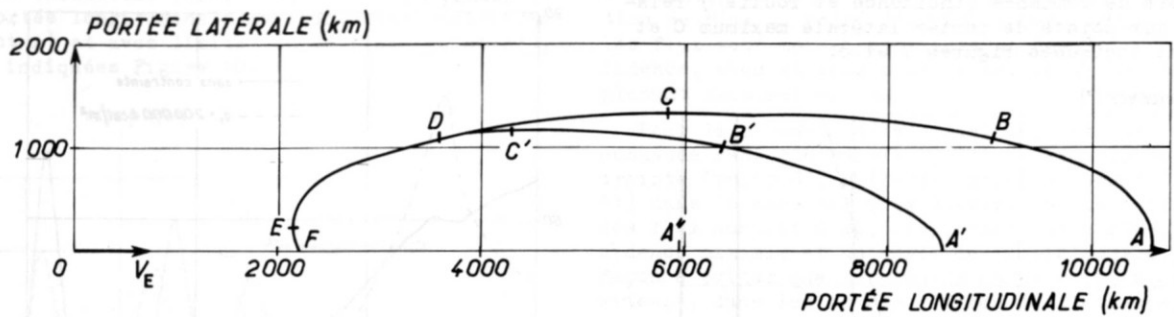
Hypothèse Terre non tournante.

Ce décalage a une influence beaucoup plus importante en ce qui concerne l'échauffement de la structure, indiqué sur les Figures 4 et 9, en accord avec les résultats<sup>(5)</sup> de la trajectoire équilibrée (chaleur totale et flux de chaleur inversement proportionnels à la racine carrée du coefficient balistique pour une finesse donnée).

1) La Figure 4 est relative au planeur de plus forte charge alaire ( $C_{x_0} S/m = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

La chaleur totale reçue par convection par unité de surface au voisinage d'un point d'arrêt, ainsi que le flux maximum rencontré en ce point et en un point de l'intrados sont indiqués pour quelques trajectoires atteignant des points particuliers de la frontière du domaine (en B et D la tangente à la frontière du domaine a une pente de  $\pm 1/4$ ). Le niveau élevé du flux à l'intrados exclut la possibilité de protéger le planeur par une structure rayonnante. Dans le cas d'une protection par ablation, une limitation de la chaleur totale reçue à  $200\,000 \text{ kcal/m}^2$  ( $836\,000 \text{ kJ/m}^2$ ) conduit à une limitation du domaine qui se trouve amputé de sa partie la plus lointaine. La chaleur totale ne peut pas être limitée en deça de  $350\,000 \text{ kJ/m}^2$ , qui est atteinte pour les trajectoires atteignant les points de l'arc EF. La trajectoire atteignant E correspond à un vol à incidence constante  $40^\circ$  (incidence maximum) et à roulis constant  $90^\circ$  (roulis maximum). Les trajectoires atteignant les points de l'arc EF correspondent à des vols à incidence  $40^\circ$  et à des lois de roulis comprenant une seule commutation de  $+90^\circ$  à  $-90^\circ$ . Plusieurs commutations entre  $+90^\circ$  et  $-90^\circ$  conduisent à des trajectoires plus "longues", le point final étant à l'intérieur du domaine accessible.

Les lois d'incidence permettant d'atteindre les points de portée longitudinale maximum A et A' (chaleur totale limitée à  $836\,000 \text{ kJ/m}^2$ ) sont indiquées Figure 5. Sans contrainte, le vol a lieu à une incidence très voisine de l'incidence de finesse maximum  $20^\circ$ , sauf tout à fait à la fin de la trajectoire où l'incidence atteint sa valeur maximum  $40^\circ$ , correspondant à une tendance à exécuter un arrondi permettant de réaliser un léger gain de portée. Avec contrainte de chaleur, la loi d'incidence est beaucoup plus fluctuante, le planeur cherchant, tout au long d'une trajectoire comprenant des ricochets sur l'atmosphère, un compromis entre la portée maximum (vol au voisinage de la finesse maximum) et la chaleur minimum (vol au voisinage du  $C_z \text{ max}$ )



POINTS	A	B	C	D	E	F	A'	B'	C'	A''
Chaleur totale (kJ/m <sup>2</sup> )	1550 000	1430 000	1150 000	820 000	350 000	350 000	836 000	836 000	836 000	653 000
Flux max arrêt (kW/m <sup>2</sup> )	2270	2330	3060	3420	3200	3200	3220	2940	2935	6200
Flux max intrados (kW/m <sup>2</sup> )	645	666	896	1000	1255	1255	1080	905	883	2000

Figure 4. Domaines accessibles avec et sans contrainte sur la chaleur totale reçue ( $q_r < 200\ 000\ \text{kcal/m}^2$ ). Coefficient balistique :  $C_{x_0} S/m = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

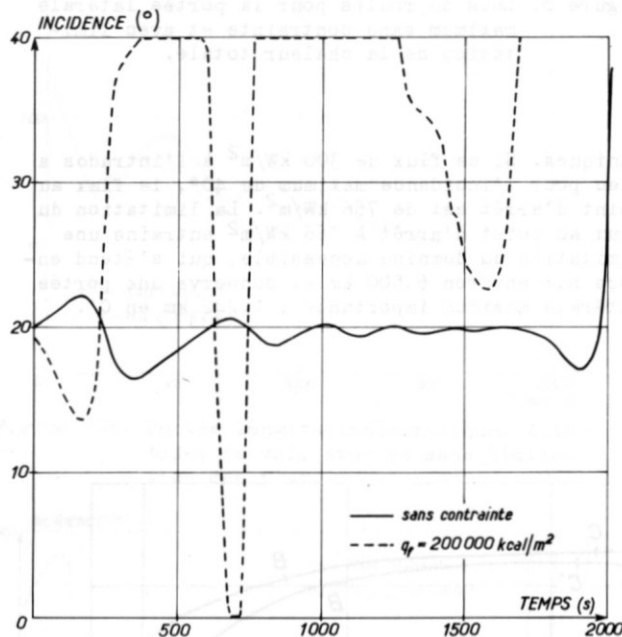


Figure 5. Lois d'incidence pour la portée longitudinale maximum, avec et sans limitation de la chaleur reçue.

Le point A'', atteint avec un angle de roulis maintenu à 0, correspond au minimum de la chaleur totale, par modulation de l'incidence seulement. Il existe des points sur l'axe de symétrie du domaine pour lesquels la chaleur finale est moins élevée que celle de A'', mais ces points ne peuvent être atteints que grâce à une modulation de l'angle de roulis, avec au moins un changement de signe de cet angle, de façon à annuler la portée latérale finale. La loi d'incidence relative au point A'' est indiquée Figure 6.

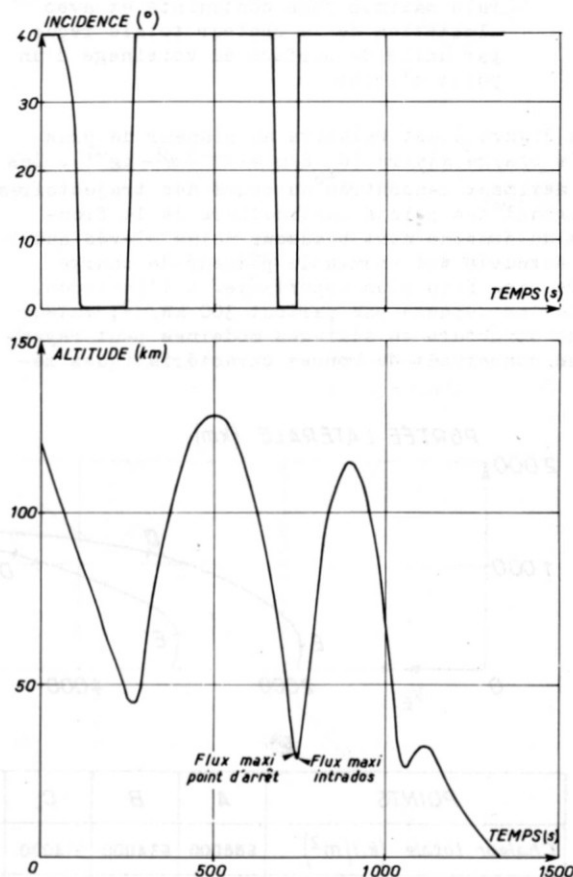


Figure 6. Loi d'incidence donnant la trajectoire de chaleur totale minimum (sans virage)

Les lois de commande (incidence et roulis) relatives aux points de portée latérale maximum C et C' sont indiquées Figures 7 et 8.

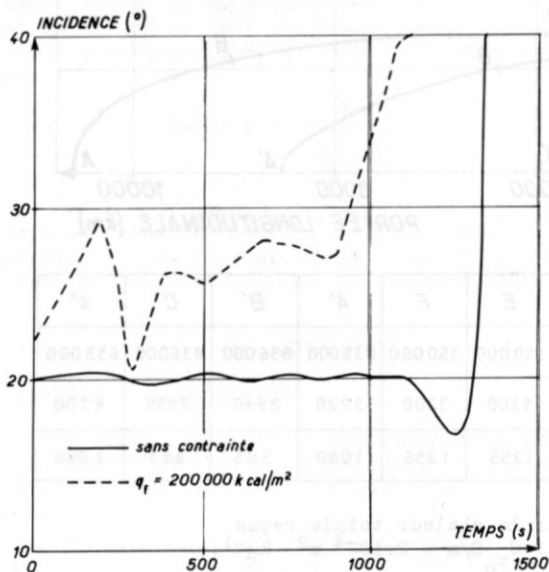


Figure 7. Lois d'incidence pour la portée latérale maximum sans contrainte et avec limitation de la chaleur totale reçue par unité de surface au voisinage d'un point d'arrêt.

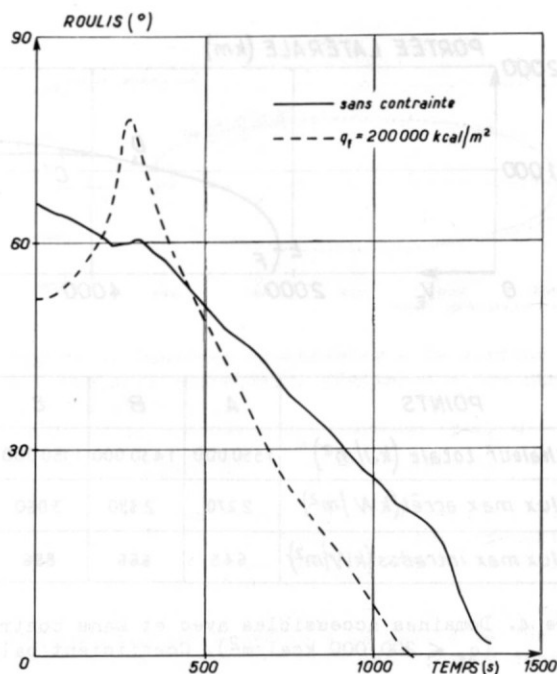
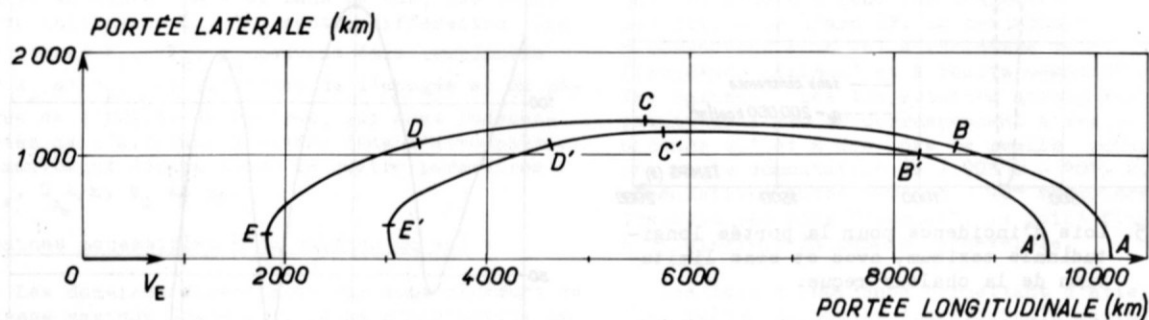


Figure 8. Lois de roulis pour la portée latérale maximum sans contrainte et avec limitation de la chaleur totale.

2) La Figure 9 est relative au planeur de plus faible charge alaire ( $C_{x_0} S/m = 10^{-3} m^2 - kg^{-1}$ ). Les flux maximaux rencontrés au cours des trajectoires atteignant des points particuliers de la frontière du domaine sont beaucoup moins élevés que ceux auxquels est soumis le planeur de charge alaire cinq fois plus importante. A l'intrados, le flux ne dépasse pas partout  $300 kW/m^2$ , valeur qu'une structure en alliages modernes peut rayonner en conservant de bonnes caractéristiques mé-

caniques. Si ce flux de  $300 kW/m^2$  à l'intrados a lieu pour l'incidence maximum de  $40^\circ$ , le flux au point d'arrêt est de  $766 kW/m^2$ . La limitation du flux au point d'arrêt à  $766 kW/m^2$  entraîne une limitation du domaine accessible, qui s'étend encore sur environ  $6 500 km$  et conserve une portée latérale maximum importante :  $1 242 km$  en C'.



POINTS	A	B	C	D	E	A'	B'	C'	D'	E'
Chaleur totale ( $kJ/m^2$ )	688000	634000	514000	356000	154000	650000	614000	502000	412000	234000
Flux max arrêt ( $kW/m^2$ )	995	1010	1370	1700	1430	766	766	766	766	766
Flux max intrados ( $kW/m^2$ )	279	287	400	510	560	293	268	300	300	300

Figure 9. Domaines accessibles avec et sans contrainte sur le flux au point d'arrêt (Flux  $\leq 766 kW/m^2$ ) Coefficient balistique :  $C_{x_0} S/m = 10^{-3} m^2 - kg^{-1}$ .



Les caractéristiques relatives aux trajectoires de portée longitudinale maximum, sans contrainte (point A) et avec limitation de flux (point A'), sont indiquées Figure 10.

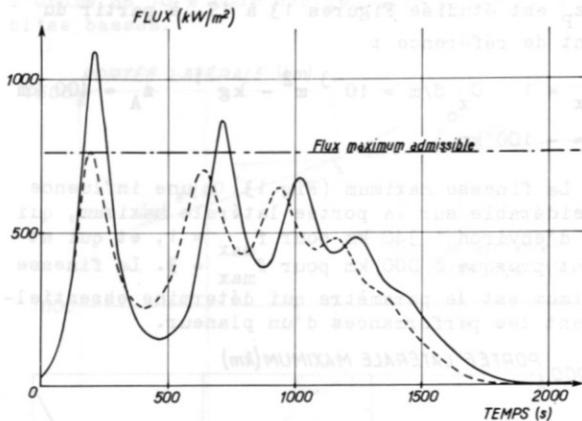


Figure 10a. Portée longitudinale maximum ( $f_{max} = 1$ ,  $\gamma_E = -2,2^\circ$ ). Flux de chaleur au point d'arrêt avec et sans limitation.

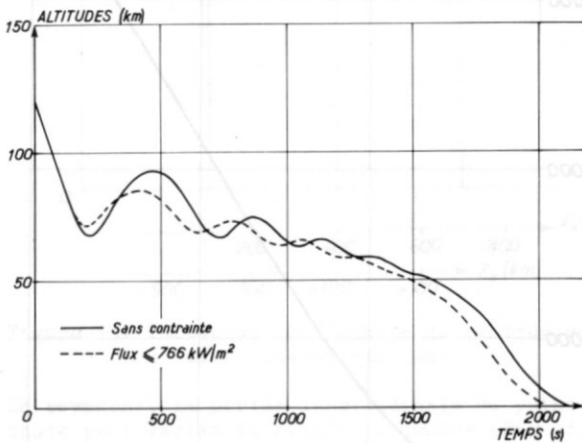


Figure 10b. Portée longitudinale maximum. Altitudes de vol, avec et sans limitation des flux.

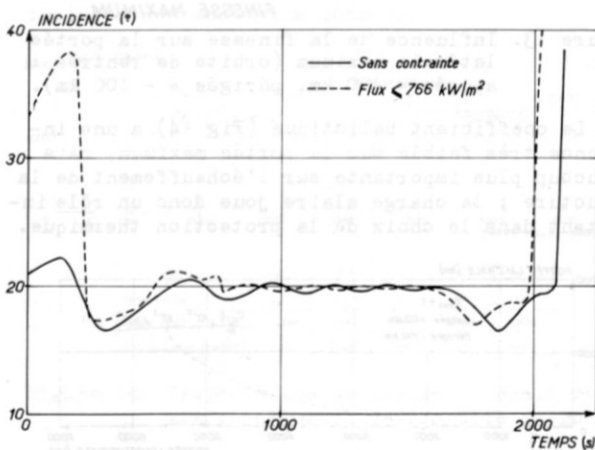


Figure 10c. Portée longitudinale maximum. Lois d'incidence optimales avec et sans limitation des flux.

Au cours du premier ricochet sur l'atmosphère, le planeur doit être mis à grande incidence de façon

à ralentir sa vitesse et à satisfaire la limitation de flux au point d'arrêt. Après ce ricochet, les flux sont moins importants et les lois d'incidence, avec et sans contrainte, se trouvent simplement décalées en temps.

Pour la portée latérale maximum, les lois de commande sans contrainte (point C) et avec contrainte (point C') diffèrent principalement (Fig 11) dans la zone des flux élevés. La limitation des flux conduit à utiliser, dans cette zone, l'incidence maximum et un angle de roulis modéré, de façon à éviter que le planeur ne pénètre, à grande vitesse, dans les couches denses de l'atmosphère.

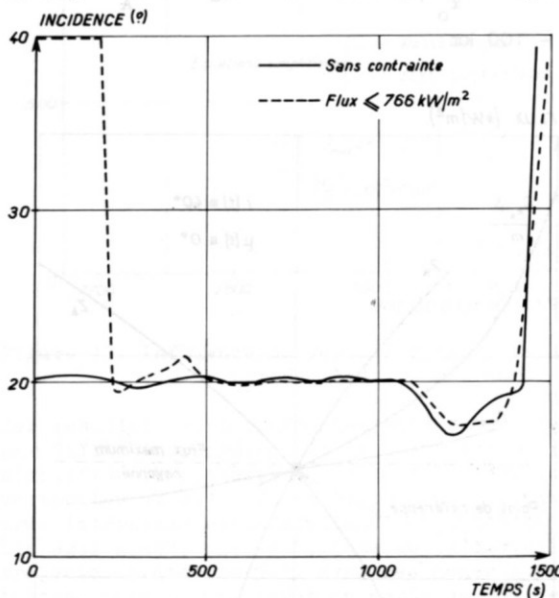


Figure 11a. Portée latérale maximum. Lois d'incidence optimales avec et sans limitation des flux.

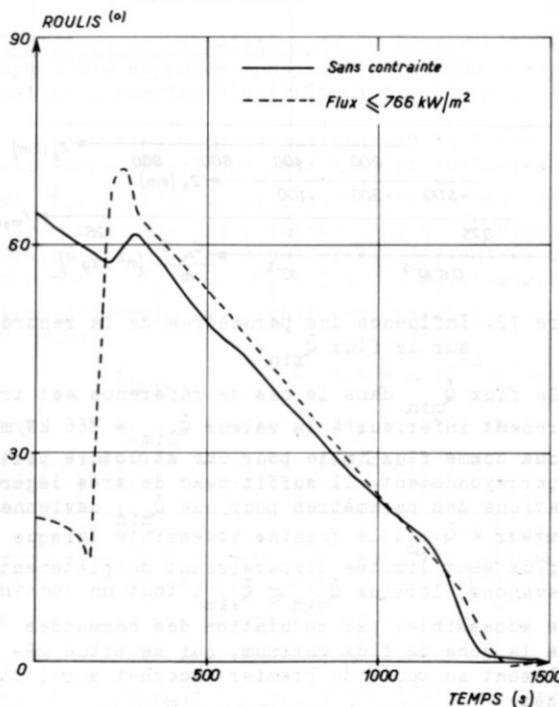


Figure 11b. Portée latérale maximum. Lois de roulis optimales avec et sans limitation des flux.

**Trajectoires de flux minimum :** Il est intéressant de savoir jusqu'à quelle valeur la modulation de l'incidence et de l'angle de roulis permet de limiter le flux maximum  $\dot{Q}$  atteint au point d'arrêt au cours de la rentrée. Ce flux  $\dot{Q}$  est minimum ( $\dot{Q}_{\min}$ ), lorsqu'on utilise les lois de commande :  $i(t) \equiv 40^\circ$ ,  $\mu(t) \equiv 0$ . La Figure 12 montre l'influence des quatre paramètres  $f_{\max}$ ,  $C_{x_0}$  S/m,  $z_A$  et  $z_P$  sur ce flux minimum  $\dot{Q}_{\min}$ , l'influence de chaque paramètre étant étudiée séparément à partir du point de référence :

$$f_{\max} = 1 \quad C_{x_0} \text{ S/m} = 10^{-3} \text{ m}^2 - \text{kg}^{-1} \quad z_A = 400 \text{ km} \\ z_P = -100 \text{ km}$$

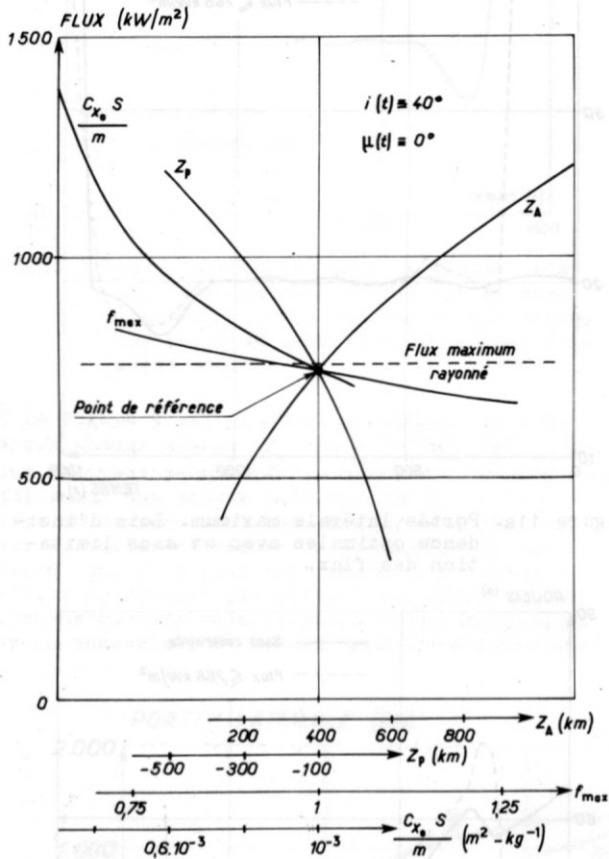


Figure 12. Influence des paramètres de la rentrée sur le flux  $\dot{Q}_{\min}$ .

Le flux  $\dot{Q}_{\min}$  dans le cas de référence est très légèrement inférieur à la valeur  $\dot{Q}_{\lim} = 766 \text{ kW/m}^2$ , retenue comme flux limite pour une structure protégée par rayonnement. Il suffit donc de très légères variations des paramètres pour que  $\dot{Q}_{\min}$  devienne supérieur à  $\dot{Q}_{\lim}$ , le domaine accessible lorsque les flux sont limités disparaissant complètement. En revanche, lorsque  $\dot{Q}_{\min} \leq \dot{Q}_{\lim}$ , tout un domaine reste accessible, par modulation des commandes après la zone de flux maximum, qui se situe généralement au cours du premier ricochet sur l'atmosphère.

**Trajectoire de portée latérale maximum :** la trajectoire atteignant le point de portée latérale

maximum est l'une des plus intéressantes puisqu'elle fournit l'écart maximum avec le plan de l'orbite de rentrée. L'influence sur cet écart de chacun des quatre paramètres  $f_{\max}$ ,  $C_{x_0}$  S/m,  $z_A$  et  $z_P$  est étudiée Figures 13 à 17, à partir du point de référence :

$$f_{\max} = 1 \quad C_{x_0} \text{ S/m} = 10^{-3} \text{ m}^2 - \text{kg}^{-1} \quad z_A = 400 \text{ km} \\ z_P = -100 \text{ km}$$

La finesse maximum (Fig 13) a une influence considérable sur la portée latérale maximum, qui est d'environ 1 340 km pour  $f_{\max} = 1$ , et qui atteint presque 8 000 km pour  $f_{\max} = 3$ . La finesse maximum est le paramètre qui détermine essentiellement les performances d'un planeur.

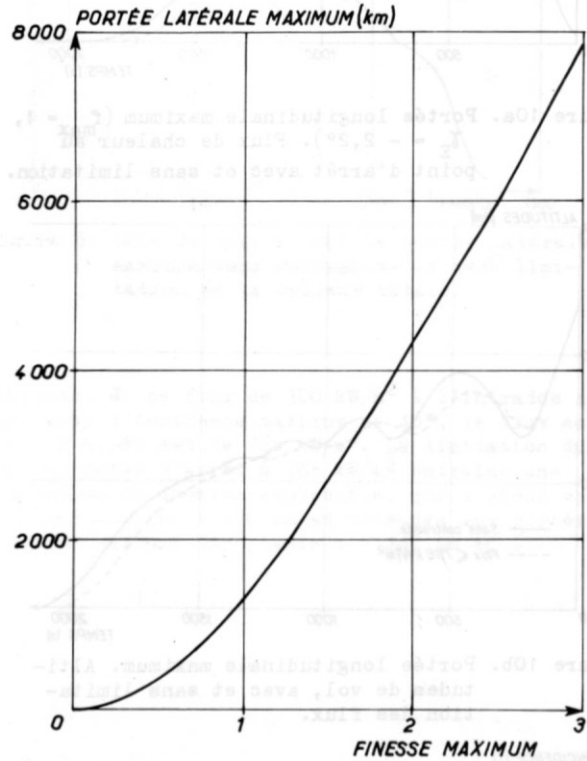
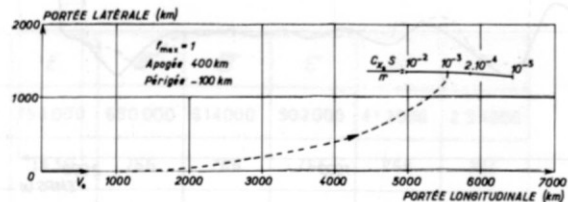


Figure 13. Influence de la finesse sur la portée latérale maximum (orbite de rentrée : apogée = 400 km, périgée = -100 km).

Le coefficient balistique (Fig 14) a une influence très faible sur la portée maximum, mais beaucoup plus importante sur l'échauffement de la structure ; la charge alaire joue donc un rôle important dans le choix de la protection thermique.



$C_{x_0} \text{ S/m (m}^2\text{-kg}^{-1}\text{)}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-5}$
Chargeur totale (kJ/m <sup>2</sup> )	150 000	515 000	1 130 000	5 150 000
Flux maximum (kW/m <sup>2</sup> )	418	1390	3040	13400

Figure 14. Trajectoires de portée latérale maximum ; influence du coefficient balistique.

Les caractéristiques (altitudes de l'apogée et du périgée) de l'orbite de rentrée (Fig 15) ont une influence assez faible : les variations relatives de la portée latérale maximum sont de l'ordre de 10 % pour des rentrées à partir d'orbites basses.

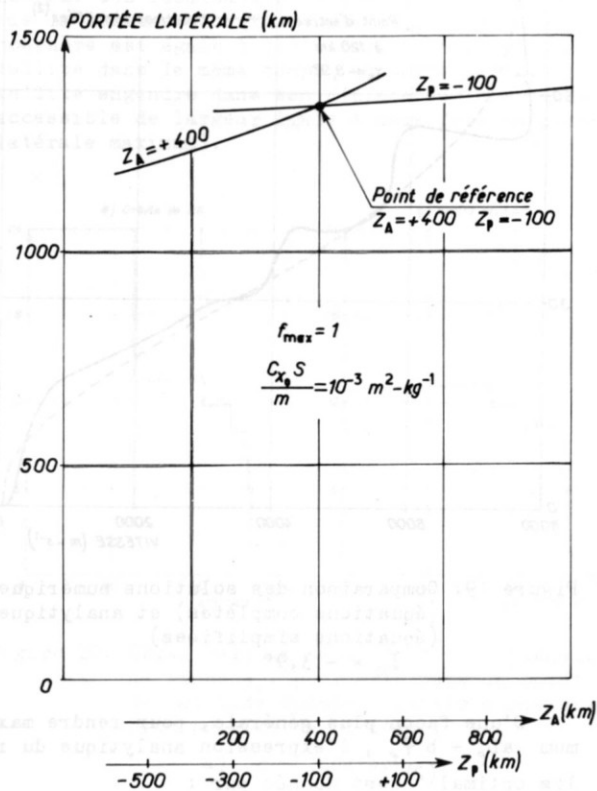


Figure 15. Influence de l'orbite de rentrée sur l'écart latéral maximum.

En revanche, la portée longitudinale du point de chute peut varier du simple au double (Fig 16), en relation avec la pente du vecteur vitesse à 120 km d'altitude. Les pentes faibles entraînent des flux de chaleur faibles, mais des quantités totales de chaleur plus fortes, du fait que les trajectoires sont plus longues.

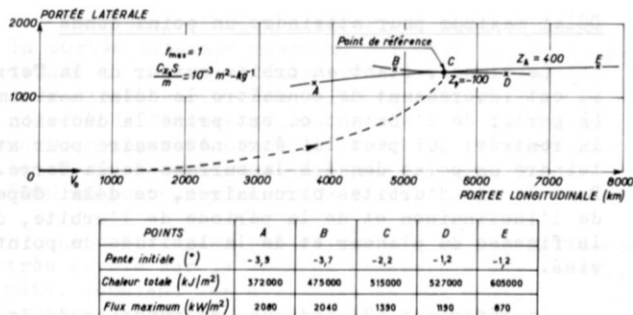


Figure 16. Trajectoires de portée latérale maximum ; influence de l'orbite de rentrée.

Pour ces différentes orbites de rentrée, les résultats peuvent être également présentés en fonction de la vitesse d'entrée V<sub>E</sub> à 120 km et de la pente d'entrée γ<sub>E</sub> (Fig 17).

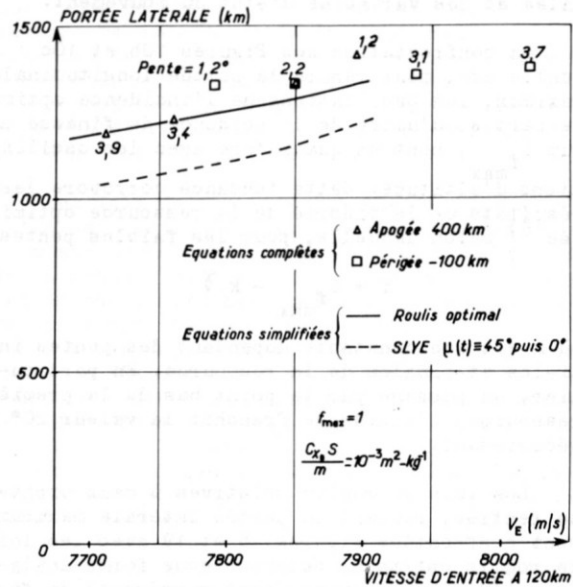


Figure 17. Influence du vecteur vitesse initiale sur la portée latérale maximum.

Ces résultats sont confrontés avec ceux obtenus par SLYE<sup>(1)</sup> en représentant le mouvement de façon simplifiée (hypothèses de l'équilibre des forces verticales et de la Terre plate pour les manoeuvres latérales) et en utilisant un angle de roulis égal à 0, puis à 45°, lorsque la déviation de trajectoire atteint 90°. Avec ces mêmes hypothèses, mais en utilisant un angle de roulis optimal<sup>(2)</sup>, la portée latérale obtenue est voisine, mais un peu inférieure à celle obtenue avec les équations complètes.

Influence de la rotation de la Terre : la Terre ayant été supposée sphérique, le terme d'accélération d'inertie d'entraînement a été négligé.

L'influence de la rotation de la Terre sur elle-même dépend des deux valeurs initiales χ<sub>E</sub> et φ<sub>E</sub>. L'ordre de grandeur de cet effet, considéré ici comme une perturbation, a été simplement évalué dans le cas d'une orbite de rentrée équatoriale (φ<sub>E</sub> = 0, χ<sub>E</sub> = ± 90°), où l'accélération d'inertie de Coriolis est maximum. Pour les valeurs

$$f_{\max} = 1 \quad C_{X_0} S / m = 2.10^{-4} \text{ m}^2 - \text{kg}^{-1}$$

$$z_A = + 400 \text{ km} \quad z_P = - 100 \text{ km}$$

les variations de portée par rapport au cas sans rotation sont les suivantes :

Orbite équatoriale	Est-Ouest	Ouest-Est
Portée longitudinale maximum	+ 588 km	- 1063 km
Portée latérale maximum	+ 106 km	- 119 km

Relation commandes - variables d'état :

La méthode du gradient fournit les lois de commande optimales en fonction du temps.

Il serait cependant intéressant de rechercher d'éventuelles relations entre les commandes optimales et les variables d'état du mouvement.

La confrontation des Figures 10b et 10c montre que, pour rendre la portée longitudinale maximum, les oscillations de l'incidence optimale, de part et d'autre de l'incidence de finesse maximum  $i_{f_{max}}$ , sont en quadrature avec les oscillations d'altitude. Cette tendance corrobore les résultats de la théorie de la ressource optimisée<sup>(6)</sup> selon laquelle, pour les faibles pentes :

$$i = i_{f_{max}} - k \cdot \gamma$$

où  $k$  est une constante dépendant des pentes initiales et finales de la ressource. En particulier, au passage par le point bas de la première ressource, l'incidence franchit la valeur  $20^\circ$  en décroissant.

Les lois de roulis relatives à deux orbites de rentrée, rendant la portée latérale maximum, sont confrontées Figures 18 et 19 avec les lois de roulis optimales obtenues sous forme analytique<sup>(2)</sup>, le mouvement étant représenté de façon simplifiée. L'accord est d'autant meilleur que la trajectoire de rentrée est plus voisine des conditions de l'équilibre (pente faible à l'entrée). Dans le cas de la rentrée sous la plus forte pente ( $\gamma_E = -3,9^\circ$ ), l'optimisation numérique a été étudiée en prenant comme point initial l'apogée (à 400 km) de l'orbite de rentrée, et l'angle de roulis obtenu varie entre  $90^\circ$  et  $60^\circ$  environ pour les altitudes supérieures à 120 km, en accord avec l'indication de la loi analytique.

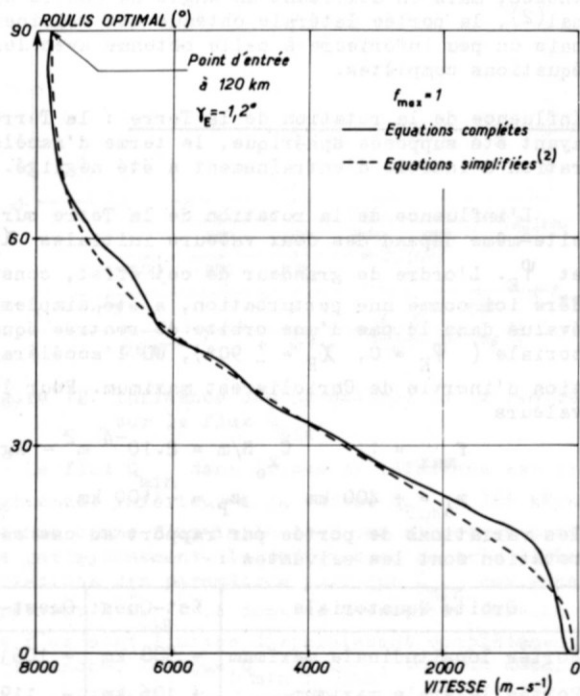


Figure 18. Comparaison des solutions numérique (équations complètes) et analytique (équations simplifiées)  
 $\gamma_E = -1,2^\circ$

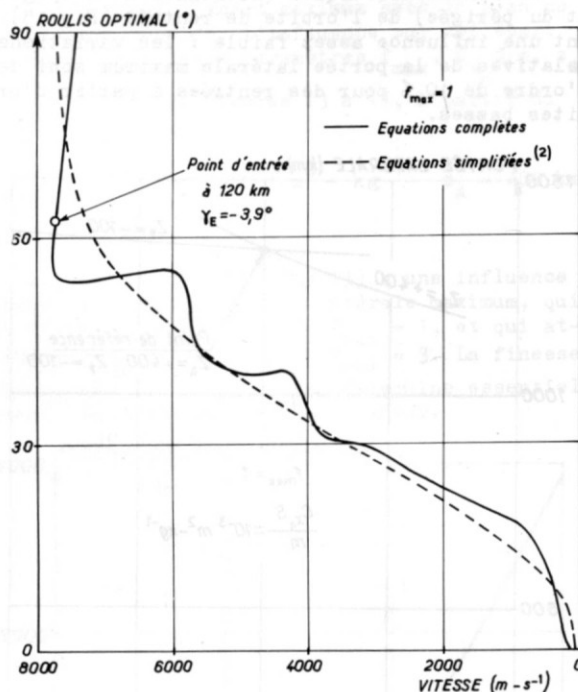


Figure 19. Comparaison des solutions numérique (équations complètes) et analytique (équations simplifiées)  
 $\gamma_E = -3,9^\circ$

D'une façon plus générale, pour rendre maximum  $aL_f + b\psi_f$ , l'expression analytique du roulis optimal<sup>(2)</sup> est donnée par :

$$\operatorname{tg} \mu = r \cdot \frac{g \cdot r_0 - V^2}{V^2} \cdot \frac{b(L - L_f) - a(\psi - \psi_f)}{b \sin(\chi_f - \chi) + a \cos(\chi_f - \chi)}$$

L'angle de roulis optimal apparaît donc comme une fonction des variables d'état locales  $V$ ,  $\chi$ ,  $L$ ,  $\psi$ , mais dépend également des valeurs finales  $L_f$  et  $\psi_f$ .

#### Délai maximum pour atteindre un point donné

Le planeur étant en orbite autour de la Terre, il est intéressant de connaître le délai maximum (à partir de l'instant où est prise la décision de la rentrée) qui peut lui être nécessaire pour atteindre un point donné à la surface de la Terre. Dans le cas d'orbites circulaires, ce délai dépend de l'inclinaison et de la période de l'orbite, de la finesse du planeur et de la latitude du point visé.

La référence (7) indique, en fonction de la finesse maximum et de l'inclinaison de l'orbite, le délai maximum nécessaire pour atteindre un point de  $35^\circ$  de latitude, dans le cas où la période de l'orbite est de 90 minutes. De plus, il est montré (7) que, dans le cas d'orbites polaires de 90 minutes, un planeur de finesse 1 peut atteindre un point quelconque de la Terre deux fois par jour, et qu'une finesse de 0,7 suffit dans un délai de 24 heures.

Ces résultats peuvent être complétés dans le cas des orbites polaires par la Figure 20 qui indique le délai maximum qui peut être nécessaire en fonction de la latitude du point à atteindre, dans le cas d'un planeur de finesse maximum égale à 1, la période de l'orbite étant de 2 et de 1,5 heures. Ces résultats sont obtenus en supposant que la distance longitudinale parcourue dans l'atmosphère est égale à celle parcourue par le satellite dans le même temps (en sorte que le satellite engendre dans son déplacement une bande accessible de largeur égale à deux fois sa portée latérale maximum).

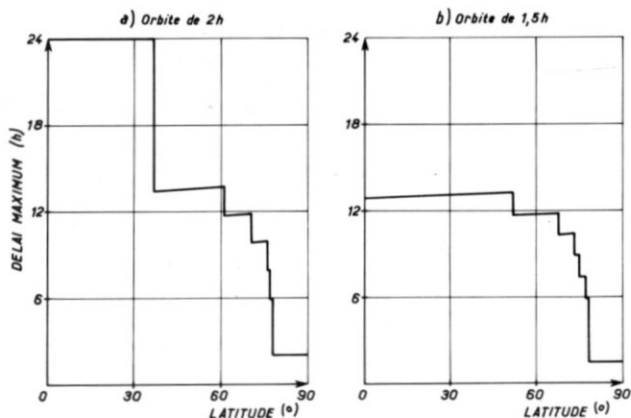


Figure 20. Délai maximum nécessaire à un planeur de finesse 1 pour atteindre un point de latitude donnée à partir d'une orbite polaire de période :

- a) 2 heures
- b) 1,5 "

#### V. Conclusion

Les résultats présentés sur l'optimisation des trajectoires de rentrée permettent d'apprécier l'influence des paramètres du mouvement, la Terre étant supposée sphérique immobile, avec une atmosphère dont la densité varie de façon exponentielle avec l'altitude.

Pour des rentrées à partir d'orbites basses, la portée latérale maximum, qui caractérise l'aptitude du planeur à quitter le plan de l'orbite de rentrée, varie entre 1200 et 1400 km pour un planeur de finesse maximum égale à 1. La finesse maximum apparaît comme la paramètre déterminant, la portée latérale atteignant, par exemple, 6000 km pour un planeur de finesse 2,5.

Le coefficient balistique n'a qu'une influence très faible sur le domaine accessible sur le sol, mais, décalant les altitudes de vol équilibré, il modifie largement l'échauffement qui a été représenté de façon simplifiée, de façon à indiquer uniquement l'influence des paramètres. En particulier, seuls les planeurs de faible charge alaire sont susceptibles d'être protégés par rayonnement, en retenant aujourd'hui la valeur 300 kW/m<sup>2</sup> comme flux limite pouvant être rayonné par la structure, en conservant une bonne résistance mécanique. Compte tenu de l'influence des autres paramètres, et du poids de la structure nécessaire à la protection des charges transportées contre les hautes

températures extérieures, l'utilisation d'une structure rayonnante n'apparaît possible que dans une gamme de missions très restreinte. Toutefois, lorsque ce mode de protection est retenu, la limitation des flux à une valeur maximum admissible n'est limitative que dans la première partie de la trajectoire, le choix des commandes après la zone des flux élevés permettant de couvrir un domaine au sol encore important.

Les lois de commande (incidence et roulis) obtenues constituent une bonne approximation des lois strictement optimales (convergence améliorée de la méthode du gradient). Leur évolution moyenne est en bon accord avec la solution analytique<sup>(2)</sup> relative aux trajectoires équilibrées, mais elles rendent compte, en outre, des ricochets du planeur sur l'atmosphère. En particulier, l'incidence de vol évolue généralement au voisinage de l'incidence de finesse maximum, mais en quadrature avec les oscillations d'altitude. La loi de roulis relative à la portée latérale maximum évolue de façon régulière entre 90° environ au début de la trajectoire et 0° à l'arrivée au sol.

La rotation de la Terre modifie les résultats précédents de moins de 10 % dans les cas extrêmes.

Le délai maximum qui peut être nécessaire à un planeur de finesse 1, sur une orbite circulaire basse survolant les pôles, pour atteindre un point de latitude 45°, par exemple, est de l'ordre de 14 heures.

#### Références

- (1) R.E. SLYE - "An analytical method for studying the lateral motion of atmosphere entry vehicles". Nasa TN D-325 (September 1960)
- (2) J. FAVE - "Approche analytique du problème du domaine accessible à un planeur orbital". Rech. Aér. n° 124 (1968).
- (3) A.E. BRYSON, K. MIKAMI and C.T. BATTLE - "Optimum lateral turns for a re-entry glider". IAS Paper n° 62-6 (1962).
- (4) J. FAVE - "Commande optimale déterministe. Aspects et améliorations de la méthode du gradient". Rech. Aér. n° 121 (1967).
- (5) A.J. EGGERS, H. ALLEN and S.E. NEICE - "Analyse comparée des performances de véhicules hypersoniques à grande portée". Naca TN 4046 (Octobre 1957).
- (6) P. CONTENSOU - "Contribution à l'étude schématique des trajectoires semi-balistiques à grande portée". A.T.M.A. (1965).
- (7) D.L. BARADELL, C.H. MC LELLAN - "Lateral range and hypersonic lift-drag ratio requirements for efficient ferry service from a near earth manned space station" - 2<sup>nd</sup> Manned Space Flight Meeting, (April 1963).