ICAS Paper No. 68-31

THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN EINFLUSS VON BESCHLEUNIGUNG, VERZÖGERUNG UND ATMOSPHÄREN-SCHICHTUNG AUF DEN FLUGZEUGKNALL

by

Roland Stuff
Institut für theoretische Gasdynamik
Deutsche Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt
Aachen, Germany

The Sixth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences

DEUTSCHES MUSEUM, MÜNCHEN, GERMANY/SEPTEMBER 9-13, 1968

Preis: DM 2.00

THEORETISCHE UNTERSUCHUNG ÜBER DEN EINFLUSS VON BESCHLEUNIGUNG, VERZÖGERUNG UND ATMOSPHÄRENSCHICHTUNG AUF DEN FLUGZEUGKNALL

Roland Stuff

Deutsche Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V., Aachen, Deutschland

Übersicht

Das von Oswatitsch neu entwickelte Charakteristikenverfahren wird für die Berechnung von Verdichtungsstößen beschleunigter und verzögerter Rotationskörper (in einer isothermen Atmosphäre) modifiziert. Man erhält (explizite) Formeln für die Knallwirkung von beliebigen Flugkörpern, welche in Entfernungen gelten, die groß gegenüber der Körperlänge sind. Es zeigt sich, daß das Abklingverhalten von Verdichtungsstößen um so mehr von der Beschleunigung oder Verzögerung abhängt, je größer die Entfernung vom Flugkörper ist und je näher die Fluggeschwindigkeit an der Schallgeschwindigkeit liegt. Darüber hinaus hängt die Knallstärke mit zunehmender Entfernung vom Flugkörper noch von der Atmosphärenschichtung ab. Der Einfluß der Atmosphärenschichtung wird für verschiedene Bahnneigungen in der Ebene senkrecht unterhalb der Flugbahn und zur Seite hin untersucht. Dieses Problem ist bisher im allgemeinen nur mit akustischen Methoden behandelt worden.

I. Einleitung

Das Problem der räumlichen Stoßwellenausbreitung ist zunächst nicht hinsichtlich des Drucksprunges der Stoßwelle, sondern nur hinsichtlich ihres geometrischen Ortes theoretisch behandelt worden, weil hierfür akustische Methoden genügen, so von Prandtl (1) schon im Jahre 1938. Mit der "Theorie zweiter Ordnung" von van Dyke (2),(3),(4) läßt sich die Strömung um Rotationskörper berechnen, sie gilt jedoch nicht in großen Entfernungen vom Körper und liefert keine Verdichtungsstöße. Erst Whitham (8) und Oswatitsch (5) gelang es, Theorien zu entwickeln, die sich auf Verdichtungsstöße in großer Entfernung vom Störzentrum in einer homogenen Atmosphäre anwenden lassen. Mit beiden Verfahren sind bereits einige Probleme auf analytischem Weg gelöst worden, so z.B. (6),(7),(8),(9),(10),(11),(12),(13),(14),(15). Das Charakteristikenverfahren von Oswatitsch nach (5) hat Stuff in (16) im Hinblick auf Verdichtungsstöße beschleunigter oder verzögerter Rotationskörper in einer homogenen Atmosphäre modifiziert.

In der vorliegenden Arbeit wird das nach (16) modifizierte Charakteristikenverfahren (5) benutzt, weil in der isothermen Atmosphäre aufgrund der konstanten Schallgeschwindigkeit die Gleichungen der charakteristischen Flächen formal mit denjenigen der homogenen Atmosphäre übereinstimmen. Die Atmosphärenschichtung macht sich nur über ein Schwereglied in der Wellengleichung bemerkbar, wie Schrödinger (17) bereits 1917 zeigte. Mit der angegebenen Methode erhält man Formeln sowohl für die Knallstärke in großer Entfernung vom Flugkörper als auch für den Abstand zwischen Kopf- und Schwanzwelle.

II. Allgemeine Theorie

Das Charakteristikenverfahren

Bei der von Oswatitsch in (5) dargestellten Methode handelt es sich um eine Theorie kleiner Störungen mit unabhängigen Veränderlichen, die auf charakteristischen Flächen konstant sind. In dieser Arbeit ist der Parameter dieser Störungen das Dickenverhältnis.

Ortskoordinaten und Zeitkoordinaten

$$x = x_0 + x_1 + x_2 ; \quad z = z_0 + z_1 + z_2 + \dots ; \qquad \text{(II.1)}$$
$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots ;$$

und Zustandsgrößen

$$u_x = u_{1x} + u_{2x} + \dots ; \quad u_z = u_{1z} + u_{2z} + \dots ;$$
$$c = 1 + c_1 + c_2 + \dots ; \qquad \text{(II.2)}$$
$$p = p_0 + p_1 + \dots ; \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 + \dots ;$$

werden nach dem Störparameter entwickelt. Die Koordinate t stellt das Produkt aus Zeit und Ruheschallgeschwindigkeit c_0 dar und ist wie alle Koordinaten durch Division mit der Körperlänge l dimensionslos gemacht worden. Die Geschwindigkeiten hingegen sind mit der Ruheschallgeschwindigkeit dimensionslos gemacht worden. Die Koordinaten x_0, z_0, t_0 beschreiben den Charakteristikenraum, die Koordinaten x,z,t hingegen den physikalischen Raum. Der Charakteristikenraum entspricht dem physikalischen Raum, wenn die Störkoordinaten x_1, z_1, t_1 verschwinden. Diese Störkoordinaten werden nach dem Verfahren von Oswatitsch ermittelt. Im Charakteristikenraum breiten sich die Störungen mit der Schallgeschwindigkeit der ungestörten Strömung aus. Die Charakteristiken und Bicharakteristiken sind in diesem Raum im Falle der homogenen und der isothermen Atmosphäre deshalb Geraden. Vorausgesetzt wird, daß sich die Neigung der charakteristischen Flächen nicht aber ihre Lage im gestörten Raum nur wenig von derjenigen im ungestörten unterscheidet. Anstatt mit Charakteristikenflächen kann man wie in dieser Arbeit mit μ, ν, λ-Flächen arbeiten, deren Schnitte die Bicharakteristiken ergeben. Diese Flächen werden im folgenden auch als Bicharakteristikenflächen bezeichnet. Es lassen sich zunächst die ersten Näherungen der Zustandsgrößen und alsdann aus der Integration der Neigungsbedingungen die Störkoordinaten und mit diesen Störkoordinaten das nächste Reihenglied der Zustandsgrößen wechselweise berechnen. Aus der Faltung der μ,ν,λ-Flächen im x,z,t-Raum ergeben sich mit der Pfriemschen Formel die Verdichtungsstöße.

Modifizierung des Charakteristikenverfahrens

In diesem übernommenen Charakteristikenverfahren soll lediglich eine andere Wahl der unabhängigen Veränderlichen getroffen werden. Damit wird erreicht, daß man anstatt mit den drei Flächen   = konst. nur mit den Flächen   = konst. arbeitet. Zu diesem Ziel führen zwei Beziehungen.

1) An den Verdichtungsstößen treten nur Änderungen in Normalenrichtung zur Stoßfront auf. Beschränkt man sich auf die Berechnung des Verdichtungsstoßes und seiner unmittelbaren Umgebung, so genügt es deshalb, in Normalenebenen zur Stoßfront zu rechnen.

2) Nach dem Charakteristikenverfahren von Oswatitsch unterscheiden sich die Normalenrichtungen auf die charakteristischen Flächen im gestörten und ungestörten Raum nur wenig voneinander.

Die Verdichtungsstoßfläche liegt im physikalischen x,z,t-Raum in der Nähe derjenigen Charakteristikenfläche - sie sei im folgenden als "akustische Störfront" bezeichnet - welche das Störgebiet im Charakteristiken-x_o,z_o,t_o-Raum begrenzt. Aufgrund der Beziehungen 1 und 2 kann man deshalb in Normalenebenen zu der akustischen Störfront rechnen. Zunächst wird nur die x_o,z_o-Ebene senkrecht unter dem Flugkörper betrachtet. Die akustischen Störfronten von Kopf- und Schwanzwelle sind Einhüllende von Machschen Kegeln, die mit ihrer Spitze auf die Bahn der Körperspitze zeigen.

Die Spitze des Machkegels sei der Punkt (t_p, x_p) mit der dazugehörigen Flugmachzahl M_p. Dann läßt sich die akustische Störfront nach der mathematischen Theorie für die Parameterdarstellung einhüllender Flächen beschreiben.

$$(x_o-x_p)^2 + z_o^2 - (t_o-t_p)^2 = 0 \tag{II.3}$$

(Gleichung des Machkegels)

$$(x_o-x_p)M_p - (t_o-t_p) = 0 \tag{II.4}$$

Hierbei ist

$$x_p = t_p + \frac{B}{2} t_p^2 \tag{II.5}$$

$$M_p = 1 + B t_p$$

Der Beschleunigungsbeiwert hat im Falle einer Beschleunigung einen positiven und im Falle einer Verzögerung einen negativen Wert.

Der dimensionslose Beschleunigungsbeiwert B errechnet sich aus

$$B = \frac{b\ell}{c_o^2} \tag{II.6}$$

Hierin ist b die tatsächliche dimensionsbehaftete Beschleunigung, ℓ ist die Länge des Flugkörpers und c_o die Ruheschallgeschwindigkeit.

Jeder Machkegel berührt die Einhüllende in einer Geraden, die gleichzeitig in der Bicharakteristikenfläche γ = 0 liege.

In Schnitten t_o= konst. ergibt sich die Neigung der Einhüllenden aus

$$\frac{dz_o}{dx_o} = \frac{1}{\sqrt{M_p^2-1}} \tag{II.7}$$

und ihre Krümmung K_r aus

$$K_r = \frac{B}{[M_p^2-1-B(x_o-x_p)]} \tag{II.8}$$

Man erkennt an (II.8), daß für

$$B(x_o-x_p) = M_p^2-1 \tag{II.9}$$

der Nenner von (II.8) und damit der Krümmungsradius verschwinden. Das Bild der akustischen Störfront in Schnitten t_o= konst. erscheint an dieser Stelle als Schnabelspitze. Beide Seiten der Schnabelspitze haben eine gemeinsame Tangente, die Rückkehrtangente. Sie ist gleichzeitig die Tangente des vom Schallpunkt ausgehenden Machkegels.

Die Normalenebene zur akustischen Störfront wird von der jeweiligen Tangente des Machkegels mit der einhüllenden Fläche und der Achse desselben Machkegels aufgespannt. Der Schnitt der Normalenebene mit den Bicharakteristikenflächen μ,γ = konst. lege die Bicharakteristiken μ,γ = konst. fest. Da nur in diesen Normalenebenen gerechnet wird, hängt das Problem nicht mehr von den drei unabhängigen Variablen μ,ν,λ, sondern von den zwei unabhängigen Variablen μ,γ und dem für die jeweilige Normalenebene und den dazugehörigen Machkegel konstanten Parameter t_p ab. Die Bicharakteristikenflächen μ = konst. werden so gewählt, daß die Bicharakteristiken μ = konst. in der Normalenebene einen rechten Winkel mit den Bicharakteristiken γ = konst. einschließen.

Bezeichnet man mit N_o die Koordinate auf der Normalen, welche von der Spitze des jeweiligen Machkegels zählt, so erhält man für die ursprünglichen Koordinaten (x_o, z_o, t_o)

$$x_0 - x_p = \frac{1}{M_p} N_0$$

$$z_0 = N_0 \frac{1}{M_p} \sqrt{M_p^2 - 1} \qquad \text{(II.10)}$$

$$t_0 = t_0$$

Es treten jetzt nur noch die beiden Koordinaten N_0, t_0 und der Parameter t_p auf (Gl. II.5).

Die Bicharakteristikenebenen an der akustischen Störfront der Kopfwelle folgen aus

$$2\mu = (t_0 - t_p) + N_0$$

$$2\nu = (t_0 - t_p) - N_0 \qquad \text{(II.11)}$$

Die Zeit $(t_0 - t_p)$ zählt dabei von der Spitze des Machkegels.

Berücksichtigt man, daß in einem gegenüber der Luft ruhenden Koordinatensystem gerechnet wird, so erhält man die Neigungsbedingungen aus der Arbeit von Oswatitsch (5) rezeptmäßig, indem man die x_0-Koordinate durch die N_0-Koordinate ersetzt.

$$N_1 - t_1 = \int_{\mu_0}^{\mu} [u_{1N}(\bar{\mu},\nu) + c_1(\bar{\mu},\nu)] d\bar{\mu} + K_1(\nu) \qquad \text{(II.12a)}$$

$$N_1 + t_1 = \int_{\nu_0}^{\nu} [u_{1N}(\mu,\bar{\nu}) - c_1(\mu,\bar{\nu})] d\bar{\nu} + K_2(\mu) \qquad \text{(II.12b)}$$

Hierbei ist mit (II.5)

$$M(\tau) = M_p + B(\tau - t_p) \qquad \text{(II.13)}$$

und mit (II.10) ist

$$\sqrt{(t_0 - \tau)^2 - z_0^2} = \sqrt{(t_0 - t_p - [\tau - t_p])^2 - N_0^2 \frac{M_p^2 - 1}{M_p^2}} \qquad \text{(II.14)}$$

Die infolge der Verschiebung der Normalenebene im gestörten gegenüber dem ungestörten Raum auftretende Störkoordinate in Tangentialrichtung zur Stoßfront ist von höherer Ordnung klein, dies ergibt sich aus einer Fehlerabschätzung und auch aus Rechnungen von Schneider (14).

Grundgleichungen

Unter der Voraussetzung kleiner Störungen lassen sich die Grundgleichungen vereinfachen. Man erhält dann folgendes Gleichungssystem.

Bedingung der Kontinuität

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t_0} + u_{1z}\frac{\partial \rho_0}{\partial z_0}\right] + \frac{\partial u_{1x}}{\partial x_0} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y_0} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z_0} = 0 \qquad \text{(II.15)}$$

Erhaltung der Bewegungsgröße

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial t_0} = -\frac{1}{\varkappa p_0}\frac{\partial p_1}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial u_{1y}}{\partial t_0} = -\frac{1}{\varkappa p_0}\frac{\partial p_1}{\partial y_0} \qquad \text{(II.16)}$$

$$\frac{\partial u_{1z}}{\partial t_0} = -\frac{1}{\varkappa p_0}\frac{\partial p_1}{\partial z_0} - \frac{g\ell}{c_0^2}\frac{\rho_1}{\rho_0}$$

Erhaltung der Energie

$$\frac{1}{\varkappa p_0}\left[\frac{\partial p_1}{\partial t_0} + u_{1z}\frac{\partial p_0}{\partial z_0}\right] = \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t_0} + u_{1z}\frac{\partial \rho_0}{\partial z_0}\right] \qquad \text{(II.17)}$$

mit der Grundgleichung der statischen Meteorologie

$$\frac{1}{\varkappa p_0}\frac{\partial p_0}{\partial z_0} = -\frac{g\ell}{c_0^2} \qquad \text{(II.18)}$$

g ist dabei die Erdbeschleunigung.

Es wird nun die Größe α eingeführt

$$\alpha = \frac{g\rho_0}{p_0} = \frac{g\varkappa\ell}{c_0^2} \qquad \text{(II.19)}$$

$\varkappa$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen. Die Größe α ist damit ein sehr kleiner Wert von der Größenordnung des Quotienten aus Körperlänge und Höhe der isothermen Atmosphäre.

In Analogie zu einer Arbeit von Schrödinger (17) wird folgender Ansatz gemacht

$$u_{1x} = e^{-\frac{\alpha}{2} z_0} \tilde{U}_{1x}$$

$$u_{1y} = e^{-\frac{\alpha}{2} z_0} \tilde{U}_{1y} ; \quad u_{1z} = e^{-\frac{\alpha}{2} z_0} \tilde{U}_{1z} \tag{II.20}$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung α^2 gewinnt man aus dem obigen folgendes Gleichungssystem

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_{1x}}{\partial t_0^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{d}}{\partial x_0 \partial t_0} - \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \frac{\partial \tilde{U}_{1z}}{\partial x_0} \alpha$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_{1y}}{\partial t_0^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{d}}{\partial y_0 \partial t_0} - \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \frac{\partial \tilde{U}_{1z}}{\partial y_0} \alpha \tag{II.21}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_{1z}}{\partial t_0^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{d}}{\partial z_0 \partial t_0} - \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \frac{\partial \tilde{U}_{1z}}{\partial z_0} \alpha - \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \frac{\partial \tilde{d}}{\partial t_0} \alpha$$

Die Bedingung der Kontinuität ergibt

$$\frac{1}{\varkappa p_0} \frac{\partial p_1}{\partial t_0} = e^{-\frac{\alpha}{2} z_0} \left\{ \frac{\partial \tilde{d}}{\partial t_0} + \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \alpha \tilde{U}_{1z} \right\}$$

wobei $\partial \tilde{d} / \partial t_0$ eine Abkürzung für den folgenden Ausdruck sein soll

$$\frac{\partial \tilde{d}}{\partial t_0} = -\left\{ \frac{\partial \tilde{U}_{1x}}{\partial x_0} + \frac{\partial \tilde{U}_{1y}}{\partial y_0} + \frac{\partial \tilde{U}_{1z}}{\partial z_0} \right\}$$

Das Gleichungssystem stimmt nun formal vollkommen mit demjenigen von Schrödinger (17) überein. Dem retardierten Potential einer isentropen Strömung entsprechend wird die Funktion

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{f\left(t_0 - \frac{1}{c_0}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\right)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} \tag{II.22}$$

eingeführt. R_0 sei der Abstand des Aufpunktes von der Quelle oder Senke

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \tag{II.23}$$

Die Ableitungen von R_0 nach x_0, y_0 und z_0 (R_{x_0, y_0, z_0}) stellen die Richtungskosinus der Wellenfront dar.

Es läßt sich nun zeigen, daß folgender Ansatz das Gleichungssystem mit der erwünschten Genauigkeit erfüllt.

$$\frac{\partial \tilde{d}}{\partial t_0} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 F}{\partial t_0^2}$$

$$\tilde{U}_{1z} = \frac{\partial F}{\partial z_0} + \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \alpha \left(1 - R_{z_0}^2\right) F$$

$$\tilde{U}_{1y} = \frac{\partial F}{\partial y_0} - \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \alpha R_{z_0} R_{y_0} F \tag{II.24}$$

$$\tilde{U}_{1x} = \frac{\partial F}{\partial x_0} - \frac{2-\varkappa}{2\varkappa} \alpha R_{z_0} R_{x_0} F$$

Hierbei sind ebenfalls Glieder der Ordnung α^2 und bei den mit α multiplizierten Schwereanteilen noch zusätzlich Glieder der Ordnung $1/R^2$ vernachlässigt worden.

Die letztere Einschränkung ist deshalb zulässig, weil sich der mit α multiplizierte Schwereanteil erst in großer Entfernung R vom Flugkörper bemerkbar macht.

Formal entspricht damit die Ausbreitung einer Kugelwelle der von Schrödinger in(17) behandelten ebenen Welle.

Bei einer kontinuierlichen Quellsenkenverteilung auf der x_0-Achse ergibt sich die Funktion F zu

$$F = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\left(\xi, t_0 - \sqrt{(\xi - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2}\right)}{\sqrt{(\xi - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2}} \, d\xi \tag{II.25}$$

Die Funktion F hat also dieselbe Form wie das retardierte Potential einer isentropen Strömung, in ihr sind keine Schwereanteile vorhanden. Diese Schwereanteile treten im wesentlichen in der e-Potenz des Ansatzes (II.20) auf. Wie Frankl in (18) gezeigt hat, ist die momentane Quellstärke f gleich dem Produkt aus Anströmgeschwindigkeit $c_o M(\tau)$ und der Ableitung der Querschnittsflächenverteilung $S'(\xi,\tau)$ des Flugkörpers.

$$f(\xi,\tau) = c_o\, M(\tau)\, S'(\xi,\tau) \qquad \text{(II.26)}$$

mit

$$\tau = t_o - \sqrt{(x_o-\xi)^2 + y_o^2 + z_o^2} \qquad \text{(II.27)}$$

Verdichtungsstöße

Aus der Arbeit (6) von Oswatitsch lassen sich die benötigten Gleichungen für eindimensional instationäre Stöße teils direkt übernehmen, teils einfach ableiten.

Der Verdichtungsstoß liegt für $0 \leq z_o$ bei Werten von μ und ν, welche der Bedingung

$$\frac{\nu}{\mu} \ll 1 \qquad \text{(II.28)}$$

genügen.

Mit den Bicharakteristiken aus (II.11) und unter der Bedingung (II.28) ergibt sich die Beziehung

$$u_{1N} = \frac{2}{\varkappa-1}\, c_1 \qquad \text{(II.29)}$$

$$u_{1N} = e^{-\frac{\alpha}{2} z_o}\left(-\frac{1}{c_o}\frac{\partial F}{\partial t_o}\right)$$

Mit der entsprechenden Gleichung aus (6) erhält man ferner unter der Bedingung (II.28) die Stoßneigung der Kopfwelle.

Ihre Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\varkappa+1}{8}\,\frac{u_{1N}}{1+\frac{\partial t_1}{\partial \nu}} \qquad \text{(II.30)}$$

Aus den Neigungsbedingungen (II.12) folgt mit (II.28) und (II.29)

$$N_1 = -t_1$$

$$N_1 = \frac{\varkappa+1}{4}\int_{\mu_o}^{\mu} u_{1N}(\bar{\mu},\nu)\, d\bar{\mu} + K(\nu) \qquad \text{(II.31)}$$

Das Verhältnis aus Drucksprung $p-p_o = p_1$ und dem lokalen Ruhedruck p_o folgt aus

$$\frac{p_1}{p_o} = \varkappa\, u_{1N} \qquad \text{(II.32)}$$

Mit (II.10) und (II.11) findet man für U_{1N} an der Kopfwelle als erstes Glied einer Entwicklung nach (II.28):

$$u_{1N} = -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{\alpha}{2}\mu\left[\frac{\sqrt{M_p^2-1}}{M_p}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{M_p}\right]} \cdot \frac{\partial F}{\partial \nu}\,\frac{1}{c_o} \qquad \text{(II.33)}$$

Der Winkel φ ist dabei die Neigung der Flugbahn. φ wird von der Horizontalen nach oben positiv gemessen. Der Winkel θ charakterisiert die betrachtete Ebene. In der Ebene senkrecht unterhalb der Flugbahn ist $\theta = 0$.

III. Stoßwellen an einer beschleunigten Parabelbogenspindel

Es sei lediglich das Verhalten der Kopfwelle einer beschleunigten Parabelbogenspindel ausführlich dargestellt. Alle anderen Verdichtungsstöße an der Parabelbogenspindel lassen sich analog berechnen. Zwischen Körperspitze und der Rückkehrtangente

$$0 < 8\mu < M_p(M_p^2-1) \qquad \text{(III.1)}$$

folgt mit (II.25) und (II.28) die Funktion

$$F = -c_o\, l\, \operatorname{tg}^2\vartheta\, 4M_p^3 \sqrt{\frac{1}{\mu\left[M_p^2-1-\frac{8\mu}{M_p}\right]}} \cdot \sqrt{\nu}\left\{\frac{1}{3} - \frac{8\nu}{5}M_p + \frac{64}{35}\nu^2 M_p^2\right\}\nu\cdot 2 \qquad \text{(III.2)}$$

Setzt man

$$F_1(\mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} e^{-\frac{\alpha}{2}\bar{\mu}\left[\frac{\sqrt{M_p^2-1}}{M_p}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{M_p}\right]} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{\mu}\left[M_p^2-1-\frac{B\bar{\mu}}{M_p}\right]}}\, d\bar{\mu} \qquad \text{(III.3)}$$

$$F_2(\gamma) = \sqrt{\gamma}\left\{1 - 8\gamma M_p + \frac{64}{5}\gamma^2 M_p^2\right\}$$

$$C = \frac{\varkappa+1}{4} M_p^3 \, tg^2\vartheta$$

so erhält man aus der Pfriemschen Formel (II.30) die Differentialgleichung

$$\frac{d\gamma}{d\mu} = \qquad \text{(III.4)}$$

$$= \frac{C F_2(\gamma) F_1'(\mu)}{1 - 2C F_1(\mu) F_2'(\gamma)}$$

Die Lösung lautet

$$F_1(\mu) = \frac{1}{C}\,\frac{\int_{\gamma_0}^{\gamma} F_2(\bar{\gamma})\,d\bar{\gamma}}{(F_2(\gamma))^2} \qquad \text{(III.5)}$$

Die Werte für γ genügen der Ungleichung

$$0 < 2\gamma M_p < \frac{1}{8}(5-\sqrt{5}) \qquad \text{(III.6)}$$

Hierbei ist $2 M_p \gamma_n = \frac{1}{8}(5-\sqrt{5})$ der Wert der neutralen Machlinie.

Die Störkoordinate in Normalenrichtung zum Verdichtungsstoß folgt mit (II.31) zu

$$N_1 = -t_1 = 2C F_2(\gamma) F_1(\mu) \qquad \text{(III.7)}$$

Das Abklingverhalten der Verdichtungsstöße in großer Entfernung vom Körper

Man erkennt, daß in großen Entfernungen nur noch bicharakteristische Flächen aus der unmittelbaren Nähe der neutralen die Stoßfront erreichen. Hiermit lassen sich einfache Formeln für die Stöße in großer Entfernung gewinnen. Es ist

$$\frac{p_1}{p_0} = \varkappa u_{1N} = 4\varkappa\sqrt{C}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{F_1'(\mu)\sqrt{\int_{\gamma=0}^{\gamma_n} F_2(\gamma)\,d\gamma}}{\sqrt{F_1(\mu)}} \qquad \text{(III.8)}$$

mit

$$\gamma_n = \frac{1}{2M_p}\,\frac{1}{8}(5-\sqrt{5}) \qquad \text{(III.9)}$$

Die Verdichtungsstöße hinter der Rückkehrtangente

Man erkennt, daß die Störgeschwindigkeiten an der Stelle der Rückkehrtangente

$$M_p^2 - 1 = \frac{B\mu}{M_p} \qquad \text{(III.10)}$$

eine integrable Singularität aufweisen. In unmittelbarer Nähe der Rückkehrtangente liefert die Formel für den Verdichtungsstoß keine brauchbaren Ergebnisse. Es wird über die Singularität hinweg integriert, um den Verdichtungsstoß in einem großen Abstand hinter der Rückkehrtangente zu bestimmen.

Mit den Substitutionen

$$F_1(\mu_R) = \int_{\mu_0=0}^{\mu_R = \frac{M_p(M_p^2-1)}{B}} e^{-\frac{\alpha}{2}\bar{\mu}\left[\frac{\sqrt{M_p^2-1}}{M_p}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{M_p}\right]} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{\mu}\left[M_p^2-1-\frac{B\bar{\mu}}{M_p}\right]}}\, d\bar{\mu}$$

$$F_2(\mu) = \int_{\mu_R}^{\mu} e^{-\frac{\alpha}{2}\bar{\mu}\left[\frac{\sqrt{M_p^2-1}}{M_p}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{M_p}\right]} \cdot \qquad \text{(III.11)}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{\mu}\left[\frac{B\bar{\mu}}{M_p} - (M_p^2-1)\right]}}\, d\bar{\mu}$$

$$F_3(\gamma) = \sqrt{\gamma}\left[1 - 8\gamma M_p + \frac{64}{5}\gamma^2 M_p^2\right]$$

$$F_4(\nu) = \sqrt{\frac{1-2\nu M_p}{2M_p}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 - 4(1-2\nu M_p) + \frac{16}{5}(1-2\nu M_p)^2 \right\}$$

$$C = M_p^3 \, tg^2 \vartheta \, \frac{\varkappa+1}{4}$$

erhält man im Bereich

$$\mu > \frac{M_p (M_p^2 - 1)}{B} \qquad \text{(III.12)}$$

für

$$N_1 = - t_1$$

$$\text{(III.13)}$$

$$N_1 = 2c\, F_4(\nu) F_2(\mu) + {} + 2c\, F_3(\nu)\, F_1(\mu_R)$$

und als Lösung der Differentialgleichung für die Stoßneigung

$$C F_2(\mu) = \qquad \text{(III.14)}$$

$$= \frac{\int_{\bar\nu=0}^{\nu} [1 - F_3'(\bar\nu) F_1(\mu_R)] F_4(\bar\nu)\, d\bar\nu}{(F_4(\nu))^2}$$

wobei die Werte für ν der Ungleichung

$$0 < 2\nu M_p < \frac{1}{8}(3 - \sqrt{5}) \qquad \text{(III.15)}$$

genügen.

In großer Entfernung vom Flugkörper folgt für das Verhältnis von lokaler Druckstörung zum lokalen Ruhedruck

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{8\varkappa}{\varkappa+1} \sqrt{C}\, F_2'(\mu) \cdot \frac{\sqrt{\int_{\bar\nu=0}^{\nu=\nu_n} [1 - F_3'(\bar\nu) F_1(\mu_R)] F_4(\bar\nu)\, d\bar\nu}}{\sqrt{F_2(\mu)}} \qquad \text{(III.16)}$$

mit ν_n aus

$$2 M_p \nu_n = \frac{1}{8}(3 - \sqrt{5}) \qquad \text{(III.17)}$$

IV. Stoßwellen an einer verzögerten Parabelbogenspindel

Für den Fall der verzögerten Parabelbogenspindel lassen sich die Formeln (III.3), (III.4), (III.5), (III.6), (III.7), (III.8), (III.9) direkt übernehmen. Die Beschleunigung in diesen Formeln hat dann einen negativen Wert.

V. Stoßwellen an einer Parabelbogenspindel im stationären Überschall

Auch für diesen Fall lassen sich die Formeln (III.4), (III.5), (III.6), (III.7), (III.8), (III.9) direkt übernehmen. Der Beschleunigungsbeiwert verschwindet. Das Integral $F_1(\mu)$ vereinfacht sich deshalb zu der Form

$$F_1(\mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}\bar\mu \left[\frac{\sqrt{M_p^2-1}}{M_p} \cos\theta \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{M_p} \right]}}{\sqrt{\bar\mu [M_p^2 - 1]}}\, d\bar\mu \qquad \text{(V.1)}$$

VI. Schlußbetrachtung

In vielen Arbeiten über den Flugzeugknall wurde bisher die Atmosphärenschichtung lediglich dadurch berücksichtigt, daß man zum Beispiel die Druckstörung der homogenen Atmosphäre mit dem geometrischen Mittel aus Ruhedruck in Flughöhe und Ruhedruck am Erdboden dividierte. Die expliziten Formeln (III.8) und (III.16) zeigen jedoch, daß dieses Verfahren nicht einmal für die isotherme Atmosphäre gute Resultate liefert. Für die Störgeschwindigkeiten läßt es sich zwar anwenden. In den Verdichtungsstoß geht jedoch über die Formel (II.30) auch noch die Störkoordinate ein. Die dargestellte Theorie erlaubt es darüber hinaus, Verdichtungsstöße beschleunigter, verzögerter und stationär fliegender Rotationskörper mit nach oben oder unten geneigter Flugbahn, einschließlich des Einflusses der Atmosphärenschichtung in allen Ebenen zu berechnen, welche die Bahn des Flugkörpers enthalten.

Literatur

(1) Prandtl, L.
Über die Schallausbreitung bei rasch bewegten Körpern.
(Vortrag Deutsche Akademie Luftfahrtforschung 1938) Ges.Abhandl. (Springer Verlag 1961), S.1059-1070

(2) Van Dyke, M.D.
Second-order slender-body theory.
Axisymmetric Flow.
NACA TN 4281 (1958)

(3) Van Dyke, M.D.
A study of second-order supersonic flow theory.
NACA Rep. 1081 (1952)

(4) Van Dyke, M.D.
First- and second-order theory of supersonic flow past bodies of revolution.
J.Aero.Sci. 18(1951), S.161-179

(5) Oswatitsch, K.
Die Wellenausbreitung in der Ebene bei kleinen Störungen.
Archiwum Mechaniki Stosowaney 14 (1962) 3/4, S.621-637

(6) Oswatitsch, K.
Das Ausbreiten von Wellen endlicher Amplitude.
Z.f.Flugw. 10 (1962) 4/5, S.130-138

(7) Oswatitsch, K.
Der Stoßwellenknall beim Überschallflug.
Vortrag zum vierten Kongreß des International Council of the Aeronautical Sciences, Paris (1964)

(8) Whitham, G.B.
The flow pattern of a supersonic projectile.
Comm.Pure and Appl.Mech. (1952), S.301-348

(9) Whitham, G.B.
On the propagation of weak stock waves.
J.Fluid Mech.1 (1956), S.290-318

(10) Rao, P.S.
Supersonic Bangs - Part I.
The Aeronautical Quarterly, Vol.VII/1, (1956), S.21-44

(11) Rao, P.S.
Supersonic Bangs - Part II.
The Aeronautical Quarterly, Vol.VII/2, (1956), S.135-152

(12) Rothmann, H.
Analytische Untersuchung der Ausbreitung von Kugel- und Zylinderwellen.
DVL-Bericht Nr.280 (1963)

(13) Rothmann, H.
Das asymptotische Verhalten von Kugel- und Zylinderwellen.
DLR-Forschungsbericht 66-38 (1966)

(14) Schneider, W.
Analytische Berechnung achsensymmetrischer Überschallströmungen mit Stößen.
DVL-Bericht Nr.275 (1963)

(15) Schneider, W.
Theoretische Untersuchung zur Ausbreitung der Druckwelle an Geschützen im Hinblick auf die Knallbelästigung.
Als DLR-Forschungsbericht in Vorbereitung

(16) Stuff, R.
Analytische Berechnung von Verdichtungsstößen beschleunigter oder verzögerter Rotationskörper.
Als DLR-Forschungsbericht in Vorbereitung.

(17) Schrödinger, E.
Zur Akustik der Atmosphäre.
Physikalische Zeitschr. Nr.19, 18. Jahrg. (1917), S.445-453

(18) Frankl, F.J.
Effect of the Acceleration of Elongated Bodies of Revolution upon the Resistance in Compressible Flow.
NACA TM Nr.1230 (1949)
(Übersetzung aus dem Russischen Prikl. Mat.i.Mekk., Vol.10, Nr.4 (1946))