

L'EFFET DE LA RESISTANCE A L'AVANCEMENT SUR LA
VITESSE CRITIQUE DU FLUTTER

by

Augustin L. Petre
Institut Politechnique de Bucarest
Faculté de Mécanique
Bucarest, Roumaine

**The Sixth Congress
of the
International Council of the
Aeronautical Sciences**

DEUTSCHES MUSEUM, MÜNCHEN, GERMANY/SEPTEMBER 9-13, 1968

Preis: DM 2.00

THE STATE OF THE RESEARCH ON AERONAUTICAL SCIENCE

Professor Dr. Hermann Görtz
Director of the Institute for
Aeronautical Research
German Research

The Sixth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences

DEUTSCHE MUSEUM MÜNCHEN, SEPTEMBER 9-13, 1958

L'EFFET DE LA RESISTANCE A L'AVANCEMENT
SUR LA VITESSE CRITIQUE DU "FLUTTER"

Augustin Petre
Prof. Dr.
Institut Politechnique
Bucarest, Roumanie

Résumé

On établit les équations différentielles des petites oscillations de flexion et torsion pour des surfaces portantes élastiques en présence du système complet des charges aérodynamiques, c'est-à-dire la portance et la résistance à l'avancement.

On constate que l'effet de la résistance à l'avancement réalise le couplage des deux oscillations, les déformations de flexion permettant à cette force de produire une contrainte de torsion et les déformations dues à la torsion permettant aux charges aérodynamiques de produire une contrainte de flexion.

En résolvant ces équations, on trouve les conditions de stabilité.

On peut mettre en évidence un nouveau type de "flutter" ainsi qu'un nouveau type de "divergence" qui persistent aussi dans le cas de la disparition des couplages usuels, respectivement dans le cas où les centres de pression, de flexion et de gravité coïncident.

Introduction

Comme on le sait, afin qu'un phénomène aéro-élastique se produise, il est nécessaire qu'une interaction ait lieu entre les forces aérodynamiques et les forces élastiques. La constatation que la portance dépend surtout de l'angle d'incidence et que la déformation qui modifie cet angle n'est en général rien d'autre qu'une déformation de torsion, constitue ordinairement le point de départ pour l'explication des différents phénomènes aéroélastiques.

Pour qu'il se produise une torsion il faut, nécessairement, que la portance agisse excentriquement par rapport à l'axe élastique de la surface portante. Au cas où cette distance viendrait à s'annuler, la plupart des phénomènes aéroélastiques statiques disparaîtraient simultanément, compte tenu évidemment de l'explication ci-dessus concernant la cause de leur apparition. Cela étant, des forces aérodynamiques, seul l'effet de la portance est pris en considération.

Du fait de considérer l'effet de la résistance à l'avancement, on est arrivé à pouvoir mettre en évidence (1) de nouveaux phénomènes aéroélastiques stationnaires, qui dépendent d'autres facteurs

que les facteurs connus et qui maintiennent même lorsqu'ils devraient - conformément aux explications classiques - disparaître, c'est-à-dire lorsque l'excentricité des forces aérodynamiques, par rapport à l'axe élastique, serait nulle. Le moyen de réaliser dans ce cas l'interaction des forces aérodynamiques et élastiques, par l'intermédiaire de la résistance à l'avancement, est le suivant: on admet une déformation initiale de flexion, auquel cas la résistance à l'avancement produira une torsion, ayant pour excentricité la flèche. A cause de cette sollicitation, une déformation se produira, qui aura pour résultat une variation de l'incidence, respectivement de la portance. A son tour, la portance conditionne la flexion, agissant sur la déformation initiale de flexion. De cette manière, la chaîne des interactions s'achève.

En ce qui concerne l'effet quantitatif de la résistance à l'avancement, on a montré que, dans les phénomènes d'aéro-élasticité statique, celui-ci dépend, non seulement de la valeur du coefficient de résistance à l'avancement, mais aussi de la valeur de la rigidité de flexion, ainsi que du rapport entre l'envergure et l'excentricité. Sauf le cas où l'excentricité des forces aérodynamiques est petite, cet effet quantitatif est appréciable, notamment pour les surfaces portantes de grand allongement.

Dans le cas des phénomènes aéroélastiques du type "flutter", en même temps qu'il s'introduisent des forces massiques, apparaissent aussi les couplages de ces forces. Dans ce cas, évidemment, il faut considérer les forces aérodynamiques comme étant dans un régime nonstationnaire.

La résistance à l'avancement produira ici le couplage mentionné.

Equations de base

Pour étudier du point de vue quantitatif l'effet produit par cette composante des forces aérodynamiques sur le phénomène du flottement, on considérera les cas concrets d'une surface portante élastique, encastrée d'un bout et libre de l'autre. On rapporte cette surface portante à un système d'axes considéré de la manière suivante: l'axe longitudinale oy est considéré de telle sorte qu'il coïncidât à l'axe élastique de la surface portante. Les deux autres axes ox et oz seront considérés suivant les directions principales d'inertie

tie de la section transversale.

On admettra comme très différentes les deux rigidités de flexion, suivant les deux directions principales, de la surface portante, de sorte que l'on pourra négliger les déformations dans le plan yox par rapport aux autres déformations.

On considère que la surface portante a au début l'incidence nulle et que la direction de l'air coïncide avec l'axe ox .

Dans le cas des petites déformations initiales, de flexion et de torsion, on pourra admettre que les charges aérodynamiques dues à la résistance à l'avancement, initialement ayant des valeurs finies, ne varient pas beaucoup à cause de ces déformations. Les forces aérodynamiques du type de la portance, ainsi que les forces de masse seront considérées comme des fonctions linéaires de déformations et de leurs dérivées.

Nous envisagerons dans ce qui suit le flottement de flexion et de torsion de la surface portante considérée. Pour écrire les équations différentielles de flexion et de torsion, sous la forme de Lagrange, on conservera sous la forme classique les forces massiques, les forces élastiques, celles aérodynamiques que donne la portance et les frottements intérieurs. On note par $m(y)$ la masse de l'unité de longueur de la surface portante

I_α le moment d'inertie massique de l'unité de longueur par rapport à l'axe élastique de la surface portante ;

$S(y)$ le moment statique massique de l'unité de longueur par rapport au même axe ;

l la longueur de la surface portante ;

$h(y,t) = h(y)$ le déplacement vertical de la section transversale comme suite des déformations de flexion, positive vers le bas ;

$\alpha(y,t) = \alpha(y)$ l'angle de torsion de la section transversale, comme résultat de la torsion, positive dans le sens du cabrage du bord d'attaque ;

$f(y), F(y)$ des fonctions supposées de représenter les modes de déformations à la flexion, respectivement à la torsion.

Ci-dessus, h et α sont des fonctions de temps.

Avec ces notations, l'énergie cinétique totale de la surface portante en mouvement peut s'écrire

$$T = \frac{1}{2} \dot{h}^2 \int_0^l m(y) [f(y)]^2 dy + \\ + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \int_0^l I_\alpha(y) [F(y)]^2 dy + \\ + h \dot{\alpha} \int_0^l S(y) f(y) F(y) dy$$

En notant par EI la rigidité de flexion dans une section quelconque et par GJ la rigidité de torsion, l'énergie potentielle due à la déformation, devient

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \left\{ \frac{\partial^2 [hf(y)]}{\partial y^2} \right\}^2 dy + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l GJ(y) \left\{ \frac{\partial [\alpha F(y)]}{\partial y} \right\}^2 dy$$

En tenant compte de l'effet de la portance, les forces généralisées pour les degrés de liberté h et α s'écrivent :

$$Q_{hL} = \int_0^l L' f(y) dy$$

$$Q_{\alpha L} = \int_0^l M' F(y) dy$$

où

$$L' = \pi \rho b^2 \omega^2 f(y) L_h h +$$

$$+ \pi \rho b^3 \omega^2 F(y) [L_\alpha - (\frac{1}{2} + a) L_h] \alpha$$

$$M' = \pi \rho b^3 \omega^2 f(y) [M_h - (\frac{1}{2} + a) L_h] h +$$

$$+ \pi \rho b^4 \omega^2 F(y) [M_\alpha + (\frac{1}{2} + a)(L_\alpha + M_h) +$$

$$+ (\frac{1}{2} + a)^2 L_h] \alpha$$

et

$$L_h = 1 + \frac{b_r}{b} \left[-2i \left(\frac{v}{b_r \omega} \right) (F + iG) \right]$$

$$L_\alpha = \frac{1}{2} + \frac{b_r}{b} \left[-i \left(\frac{v}{b_r \omega} \right) - 2i \left(\frac{v}{b_r \omega} \right) (F + iG) + \right. \\ \left. + \left(\frac{b_r}{b} \right)^2 \left[-2 \left(\frac{v}{b_r \omega} \right)^2 (F + iG) \right] \right]$$

Dans la relations ci-dessus b re-présents la demi-corde de la surface portante dans une section donnée :

b_r demi-corde de référence
 ab distance depuis le centre élastique à la moitié de la corde

ω pulsation de flottement

ρ masse spécifique de l'air

v vitesse de l'air

F, G composantes de la fonction de Theodorsen qui sont des fonctions de k , où

$$k = \frac{b\omega}{v}$$

Comme on le voit, l'expression des charges dues à la portance a été prise, ci-dessus, comme exemple, au domaine de l'incompressibilité.

Afin d'établir les forces généralisées pour les mêmes degrés de liberté, compte tenu de l'effet de la résistance à l'avancement, on considérera les charges et les moments répartis le long de l'envergure, comme suite des déformations, en partant de l'existence d'une flexion initiale dans le plan de la surface portante, produite par la résistance à l'avancement. Ces moments fléchissants sont déterminés et aisément calculables pour une surface portante donnée en fonction de la pression dynamique. Pour une surface portante encastrée en origine, le moment fléchissant produit par les composantes de la résistance à l'avancement, peut s'écrire:

$$M_z = \rho v^2 C_D \int_0^y (y-\eta) b(\eta) d\eta$$

Si, par exemple, la corde de la surface portante était constante dans l'envergure, l'expression de ce moment s'obtiendrait par intégration et serait

$$M_z = \rho v^2 b C_D \frac{(l-y)^2}{2}$$

Il est facile à observer que ce moment fléchissant a une valeur finie et importante contrairement aux sollicitations produites par les déformations qui sont petites par hypothèse.

Dû aux déformations, ce moment fléchissant finit, aura des composantes de fléchissement dans l'autre plan principal d'inertie, ainsi que des composantes de torsion, toutes fonctions des déformations. Ces composantes sont linéaires pour les petites déformations et du presque même ordre de grandeur que celles produites par la portance.

Dans le cas d'une torsion d'angle α de la section transversale, il apparaît dans le plan perpendiculaire à la corde, une composante de moment dont la valeur sera

$$M_z \propto$$

ce qui correspond à une charge répartie de valeur

$$p_z = \frac{\partial^2 (M_z \propto)}{\partial y^2}$$

ayant la même orientation que la portance.

Dû aux déformations de flexion de la surface portante, d'après la rigidité minimale, le moment fléchissant M_z présente une composante de torsion équivalente à un moment de torsion réparti de la valeur

$$m_\alpha = M_z \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

orienté dans le sens de l'augmentation de l'angle.

Les forces généralisées pour les degrés de liberté h et α en tenant compte de l'effet de la résistance à l'avancement, pourront s'écrire

$$Q_{hD} = -\alpha \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [M_z F(y)] \right\} f(y) dy$$

$$Q_{\alpha D} = h \int_0^l M_z F(y) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} dy$$

Les expressions des forces de frottement, en tant que forces généralisées, sont :

$$Q_{hg} = i g_h h \int_0^l EI(y) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y) \right]^2 dy$$

$$Q_{\alpha g} = i g_\alpha \alpha \int_0^l GJ(y) \left[\frac{\partial}{\partial y} F(y) \right]^2 dy$$

Les équations de Lagrange pour les deux degrés de liberté h et α s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dh} \right) + \frac{\partial U}{\partial h} = \Sigma Q_h$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\alpha}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \Sigma Q_\alpha$$

respectivement

$$\ddot{h} \int_0^l m(y) [f(y)]^2 dy + \ddot{\alpha} \int_0^l s(y) f(y) F(y) dy +$$

$$+ h(1+ig_h) \int_0^l EI \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(y)] \right\}^2 dy =$$

$$= \pi \rho \omega^2 [A_{hh} h + (A_{h\alpha} - B_{h\alpha}) \alpha]$$

$$\ddot{\alpha} \int_0^l I_\alpha(y) [F(y)]^2 dy + h \int_0^l s(y) f(y) F(y) dy +$$

$$+ \alpha(1+ig_\alpha) \int_0^l GJ(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [F(y)] \right\}^2 dy =$$

$$= \pi \rho \omega^2 [(A_{\alpha h} + B_{\alpha h}) h + A_{\alpha\alpha} \alpha]$$

où

$$A_{hh} = \int_0^l b^2 [f(y)]^2 L_h dy$$

$$A_{h\alpha} = \int_0^l b^3 f(y) F(y) \left[L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] dy$$

$$A_{\alpha h} = \int_0^l b^3 f(y) F(y) \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right] dy$$

$$A_{\alpha\alpha} = \int_0^l b^4 [F(y)]^2 \left[M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a \right) x \right. \\ \left. + (L_\alpha + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right] dy$$

$$B_{h\alpha} = \frac{1}{\pi \rho \omega^2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial y^2} [M_z F(y)] f(y) dy$$

$$B_{\alpha h} = \frac{1}{\pi \rho \omega^2} \int_0^l M_z F(y) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} dy$$

Les deux dernières expressions, lesquelles introduisent l'effet de la résistance à l'avancement, peuvent s'écrire explicitement :

$$B_{h\alpha} = \frac{C_D}{2\pi} \left(\frac{v}{b_r \omega} \right)^2 b_r^2 \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \left[\int_0^y (y-\eta) a(\eta) d\eta \right] x \right. \\ \left. \times F(y) \right\} f(y) dy$$

$$B_{\alpha h} = \frac{C_D}{2\pi} \left(\frac{v}{b_r \omega} \right)^2 b_r^2 \int_0^l \left[\int_0^y (y-\eta) b(\eta) d\eta \right] x \\ \times F(y) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} dy$$

Pour simplifier les équations de mouvement, on introduit les notations

$$m = \frac{\pi \rho b_r^2 l}{\int_0^l m(y) [f(y)]^2 dy}$$

$$s = \frac{\int_0^l s(y) f(y) F(y) dy}{b_r \int_0^l m(y) [f(y)]^2 dy}$$

$$i_\alpha = \frac{\int_0^l I_\alpha(y) [F(y)]^2 dy}{b_r^2 \int_0^l m(y) [f(y)]^2 dy}$$

$$\omega_h^2 = \frac{\int_0^l EI(y) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(y)] \right\}^2 dy}{\int_0^l m(y) [f(y)]^2 dy}$$

$$\omega_\alpha^2 = \frac{\int_0^l GJ(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [F(y)] \right\}^2 dy}{\int_0^l I_\alpha(y) [F(y)]^2 dy}$$

dont la signification est facile à voir. Les deux dernières expressions, représentent le carré des pulsations propres de la surface portante, en état de vibration de flexion ou de torsion.

Avec ces notations, les équations différentielles de mouvement seront :

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{h}}{b_r} + S\ddot{\alpha} + \omega_h^2 (1+ig_h) \frac{h}{b_r} &= \\ &= \omega^2 \frac{m}{b_r^3 \ell} [A_{hh} h + (A_{h\alpha} - B_{h\alpha}) \alpha] \\ \ddot{\alpha} + \frac{S}{i\alpha} \frac{\ddot{h}}{b_r} + \omega_\alpha^2 (1+ig_\alpha) \alpha &= \\ &= \omega^2 \frac{m}{b_r^4 \ell i\alpha} [(A_{\alpha h} + B_{\alpha h}) h + A_{\alpha\alpha} \alpha] \end{aligned}$$

En observant que les variables h et α doivent être fonctions périodiques de cette même pulsation ω , les deux équations ci-dessus deviendront :

$$\begin{aligned} \left[1 - (1+ig_h) \frac{\omega_h^2}{\omega^2} + \frac{m}{b_r^2 \ell} A_{hh} \right] \frac{h}{b_r} + \\ + \left[S + \frac{m}{b_r^3 \ell} (A_{h\alpha} - B_{h\alpha}) \right] \alpha = 0 \\ \left[\frac{S}{i\alpha} + \frac{m}{b_r^3 \ell i\alpha} (A_{\alpha h} + B_{\alpha h}) \right] \frac{h}{b_r} + \\ + \left[1 - (1+ig_\alpha) \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} + \frac{m}{b_r^4 \ell i\alpha} A_{\alpha\alpha} \right] \alpha = 0 \end{aligned}$$

Pour la résolution de ce système linéaire et homogène, on admettra

$$g_h = g_\alpha = g$$

et on introduira comme variable :

$$Z = (1+ig) \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2$$

En notant

$$p = \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right)^2$$

le système pourra s'écrire

$$\begin{aligned} \left[1 + m \frac{A_{hh}}{b_r^2 \ell} - pZ \right] \frac{h}{b_r} + \\ + \left[S + m \frac{A_{h\alpha} - B_{h\alpha}}{b_r^3 \ell} \right] \alpha = 0 \\ \left[\frac{S}{i\alpha} + m \frac{A_{\alpha h} + B_{\alpha h}}{b_r^3 \ell i\alpha} \right] \frac{h}{b_r} + \\ + \left[1 + m \frac{A_{\alpha\alpha}}{b_r^4 \ell i\alpha} - Z \right] \alpha = 0 \end{aligned}$$

La condition de compatibilité du système sera

$$\begin{aligned} Z^2 - \left[1 + m \frac{A_{\alpha\alpha}}{b_r^4 \ell i\alpha} + \frac{1}{p} \left(1 + m \frac{A_{\alpha\alpha}}{b_r^2 \ell} \right) \right] Z + \\ + \frac{1}{p} \left[\left(1 + m \frac{A_{hh}}{b_r^2 \ell} \right) \left(1 - m \frac{A_{\alpha\alpha}}{b_r^4 \ell i\alpha} \right) - \right. \\ \left. - \left(S + m \frac{A_{h\alpha} - B_{h\alpha}}{b_r^3 \ell} \right) \left(\frac{S}{i\alpha} + m \frac{A_{\alpha h} + B_{\alpha h}}{b_r^3 \ell i\alpha} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

équation de coefficients complexes d'où résultera la vitesse critique de flottement v_F et la pulsation ω .

On observe que la vitesse critique de flottement dépend des facteurs p, m, S et $i\alpha$, des facteurs $A_{hh}, A_{h\alpha}, A_{\alpha h}$ et $A_{\alpha\alpha}$ qui tiennent compte de l'effet de la portance, ainsi que des facteurs $B_{h\alpha}$ et $B_{\alpha h}$ qui tiennent compte de l'effet de la résistance à l'avancement.

Résultats des calculs

Pour étudier l'effet quantitatif introduit par la résistance à l'avancement sur la vitesse critique de flottement, on considérera quelques cas concrets.

Pour simplifier, on suppose une sur-

face portante de la forme d'une section transversale et de masse constante le long de l'envergure.

On considérera comme modes de déformation :

$$f(y) = 1 - \cos \frac{\pi y}{2l}$$

$$F(y) = \sin \frac{\pi y}{2l}$$

Dans ces conditions, les intégrales qui interviennent, ont les expressions suivantes :

$$\int_0^l [f(y)]^2 dy = \int_0^l \left[1 - \cos \frac{\pi y}{2l}\right]^2 dy = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) l = 0,22676 l$$

$$\int_0^l f(y) F(y) dy = \int_0^l \left[1 - \cos \frac{\pi y}{2l}\right] \sin \frac{\pi y}{2l} dy = \frac{l}{\pi} = 0,31831 l$$

$$\int_0^l [F(y)]^2 dy = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi y}{2l} dy = 0,5 l$$

Les expressions intégrales qui tiennent compte de l'effet de la résistance à l'avancement, permettent certaines simplifications, compte tenu des conditions à la limite. On observe ainsi que

$$\int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [M_z F(y)] \right\} f(y) dy = - \int_0^l \frac{\partial [M_z F(y)]}{\partial y} \frac{\partial f(y)}{\partial y} dy$$

et

$$\int_0^l M_z F(y) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} dy =$$

$$= - \int_0^l \frac{\partial [M_z F(y)]}{\partial y} \frac{\partial f(y)}{\partial y} dy$$

de sorte que

$$B_{\alpha h} = B_{h\alpha}$$

La valeur des intégrales ci-dessus sera

$$- \int_0^l \frac{\partial [M_z F(y)]}{\partial y} \frac{\partial f(y)}{\partial y} dy = - \int_0^l \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(l-y)^2}{2} \sin \frac{\pi y}{2l} \right] \sin \frac{\pi y}{2l} \cdot \frac{\pi}{2l} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \right) = 0,23354 \frac{l}{2}$$

et les termes qui envisagent l'effet de la résistance à l'avancement auront l'expression

$$B_{\alpha h} = B_{h\alpha} = 0,23354 \cdot \frac{C_D}{2\pi} \left(\frac{v}{b\omega} \right)^2 b^3 l$$

Pour le cas considéré, les termes A_{hh} , $A_{h\alpha}$, $A_{\alpha h}$ et $A_{\alpha\alpha}$ s'écriront

$$A_{hh} = 0,22676 L_h b^2 l$$

$$A_{h\alpha} = 0,31831 \left[L_\alpha - \left(\frac{l}{2} + a \right) L_h \right] b^3 l$$

$$A_{\alpha h} = 0,31831 \left[M_h - \left(\frac{l}{2} + a \right) L_h \right] b^3 l$$

$$A_{\alpha\alpha} = 0,5 \left[M_\alpha - \left(\frac{l}{2} + a \right) (L_\alpha + M_h) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{l}{2} + a \right)^2 L_h \right] b^4 l$$

et les équations de mouvement deviendront par suite

$$\left[1 + 0,22676 m L_h - pZ\right] \frac{h}{b} +$$

$$+ \left\{ S + 0,31831 m \left[L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h \right] - \right.$$

$$\left. - 0,23354 m \frac{C_D}{2\pi} \left(\frac{v}{2\pi}\right)^2 \right\} \alpha = 0$$

$$\left\{ \frac{S}{i_\alpha} + 0,31831 \frac{m}{i_\alpha} \left[M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h \right] + \right.$$

$$+ 0,23354 \frac{m}{i_\alpha} \frac{C_D}{2\pi} \left(\frac{v}{2\pi}\right)^2 \left. \right\} \frac{h}{b} +$$

$$+ \left\{ 1 + 0,5 \frac{m}{i_\alpha} \left[M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) (L_\alpha + M_\alpha) + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h \right] - Z \left. \right\} \alpha = 0$$

c'est-à-dire

$$\left\{ 1 + 0,22676 m \left[1 - 2i \left(\frac{v}{b\omega}\right) (F+iG) \right] - pZ \right\} \frac{h}{b} +$$

$$+ \left\{ S + 0,31831 m \left[\frac{1}{2} - i \left(\frac{v}{b\omega}\right) - 2i \left(\frac{v}{b\omega}\right) (F+iG) - \right. \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{v}{b\omega}\right)^2 (F+iG) - \left(\frac{1}{2} + a\right) \left[1 - 2i \left(\frac{v}{b\omega}\right) (F+iG) \right] \right\} -$$

$$\left. - 0,23354 m \frac{C_D}{2\pi} \left(\frac{v}{b\omega}\right)^2 \right\} \alpha = 0$$

$$\left\{ \frac{S}{i_\alpha} + 0,31831 \frac{m}{i_\alpha} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + a\right) \left[1 - 2i \left(\frac{v}{b\omega}\right) (F+iG) \right] \right] + \right.$$

$$+ 0,23354 \frac{m}{i_\alpha} \frac{C_D}{2\pi} \left(\frac{v}{b\omega}\right)^2 \left. \right\} \frac{b}{h} +$$

$$+ \left\{ 1 + 0,5 \frac{m}{i_\alpha} \left[\frac{3}{8} - i \left(\frac{v}{b\omega}\right) - \left(\frac{1}{2} + a\right) \left[1 - i \left(\frac{v}{b\omega}\right) - \right. \right. \right.$$

$$\left. - 2i \left(\frac{v}{b\omega}\right) (F+iG) - 2 \left(\frac{v}{b\omega}\right)^2 (F+iG) \right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \left[1 - 2i \left(\frac{v}{b\omega}\right) (F+iG) \right] \right\} - Z \left. \right\} \alpha = 0$$

On observe de ces équations que l'effet de la résistance à l'avancement augmente en même temps que le terme $v/b\omega$. On peut observer aussi que le terme qui contient l'effet de la résistance à l'avancement de la première équation, peut être négligé par rapport à celui qui contient l'effet de la portance, qui, lui aussi est proportionnel avec le carré du terme $v/b\omega$. Par contre, dans la seconde équation, le terme qui contient l'effet de la résistance est le seul terme - parmi ceux proportionnels à h - qui soit proportionnel au carré de $v/b\omega$.

L'effet de ce terme sera augmenté également si les distances entre le centre de gravité et le centre élastique caractérisés par S et les distances entre le centre élastique et celui de la pression, caractérisées par $\frac{1}{2} + a$ deviennent petites ou tendent à zéro.

Si la pulsation ω diminue et tend à zéro, la vitesse critique tend vers la vitesse critique de divergence. Pour cette dernière, on a montré (1) que l'effet de la résistance à l'avancement est important, le terme qui tien compte de l'effet étant proportionnel au rapport

$$\frac{l}{b \left(\frac{1}{2} + a\right)}$$

Dans le cas du flottement, on peut également observer que l'effet de la résistance à l'avancement devient grand en même temps que l'augmentation de l'allongement de la surface portante.

En même temps que l'augmentation de cet allongement, la valeur du rapport $\frac{p}{\omega}$, qui, à son tour, est proportionnel de $\frac{p}{\omega}$, diminue en considérant sans doute des modes de même ordre tant pour la flexion que pour la torsion.

Envisageons quelques exemples ; afin de pouvoir apprécier quantitativement l'effet de la résistance à l'avancement.

On considérera en premier lieu le cas où $S=0$, $\frac{1}{2} + a=0$ et $p=0$.

Dans ce cas, le système d'équations de mouvement devient

$$\left\{ 1 + 0,22676 m \left[1 - \frac{2i}{K} (F+iG) \right] - pZ \right\} \frac{h}{b} +$$

$$+ 0,31831 m \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{K} - \frac{2i}{K} (F+iG) - \frac{2}{K^2} (F+iG) \right] \alpha = 0$$

$$\left(0,31831 \frac{m}{2i_\alpha} + 0,23354 \frac{m}{i_\alpha} \frac{C_D}{2\pi} \frac{1}{K^2} \right) \frac{h}{b} +$$

$$+ \left[1 + \frac{m}{2i_\alpha} \left(\frac{3}{8} - \frac{i}{K} \right) - Z \right] \alpha = 0$$

Pour simplifier, on a utilisé la notation

$$K = \frac{b\omega}{v}$$

De la condition de compatibilité de ce système, on peut écrire

$$Z = 1 + 0,1875 \frac{m}{i_\alpha} +$$

$$\frac{\left(\frac{2F}{K^2} - \frac{2G}{K} - 0,5\right) \left[1 + 0,22678 \left(1 + \frac{2G}{K}\right)\right] - 0,22678 m \frac{2F(1+2F+G)}{K \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^2}\right)}}{+}$$

$$\frac{\left[1 + 0,22678 m \left(1 + \frac{2G}{K}\right)\right]^2 + \left[0,22678 m \frac{2F}{K}\right]^2}{x}$$

$$\times 0,31831 \left(0,15915 + 0,23354 \frac{C_D}{2\pi} \frac{1}{K^2}\right) \frac{m^2}{i_\alpha} -$$

$$- \frac{m}{2i_\alpha K} +$$

$$\frac{0,22178 m \frac{2F(2F-2G-1)}{K \left(\frac{1}{K^2} - \frac{2G}{K} - \frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{1+2F+2G}{K + \frac{1}{K^2}}\right) \left[1 + 0,22678 m \left(1 + \frac{2G}{K}\right)\right]}{+}$$

$$\frac{\left[1 + 0,22678 m \left(1 + \frac{2G}{K}\right)\right]^2 + \left[0,22678 m \frac{2F}{K}\right]^2}{x}$$

$$\times 0,31831 \left(0,15915 + 0,23354 \frac{C_D}{2\pi} \frac{1}{K^2}\right) \frac{m^2}{i_\alpha} i$$

En négligeant l'effet de frottement, la condition de la limite de stabilité sera

$$Jm\{Z\} = 0 = \frac{m}{i_\alpha} \frac{1}{2K} \left\{ -1 + \right.$$

$$\left. + 0,63662 \left(0,15915 + 0,23354 \frac{C_D}{2\pi}\right) K m x \right.$$

$$\frac{0,22178 m \frac{2F(2F-2G-1)}{K \left(\frac{1}{K^2} - \frac{2G}{K} - \frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{1+2F+2G}{K + \frac{1}{K^2}}\right) \left[1 + 0,22678 m \left(1 + \frac{2G}{K}\right)\right]}{x}$$

$$\frac{\left[1 + 0,22678 m \left(1 + \frac{2G}{K}\right)\right]^2 + \left[0,22678 m \frac{2F}{K}\right]^2}{x}$$

$$\left[1 + 0,22678 m \left(1 + \frac{2G}{K}\right)\right]^2 + \left[0,22678 m \frac{2F}{K}\right]^2$$

condition d'où l'on obtient soit la valeur de K pour un C_D donné, soit la valeur nécessaire pour C_D pour un K donné. En introduisant les valeurs ainsi obtenues dans l'expression de Z , celle-ci se calculera aisément et la vitesse critique de flottement v_F , s'écrira :

$$v_F = \frac{1}{k \sqrt{Z}} b \omega_\alpha$$

Dans les conditions données, pour une valeur de K et de C_D , l'expression de Z nous montrera combien stable ou non stable est le système. En tenant compte de l'expression de Z , on obtiendra

$$g = \frac{Jm\{Z\}}{Re\{Z\}}$$

Si ce terme sera positif, sa valeur indiquera jusqu'à quelle valeur des frottements intérieurs le système demeurera non stable. Mais, si ce terme sera négatif, le système reste stable et la valeur de ce terme nous donnera une indication du degré de stabilité.

Comme exemple pratique en considère

$$S=0; \alpha=-0,5; m=0,1; i_\alpha=0,2; \rho=0$$

et on prend pour $\frac{1}{K} = 16,67$

et $\frac{1}{K} = 20,0$. Les résultats obtenus de la manière indiquée, sont donnés dans les tableau 1, ainsi que dans les diagrammes de la figure 1.

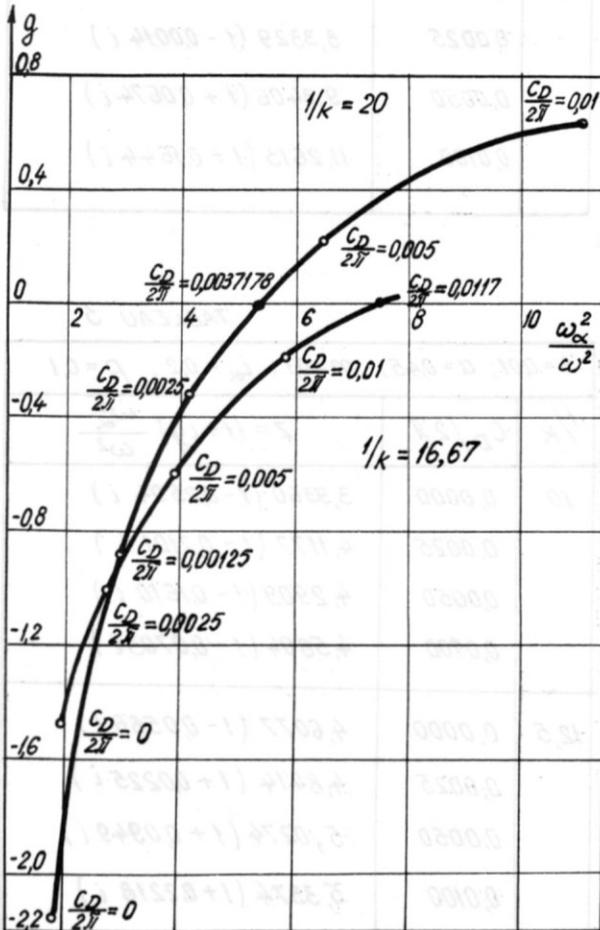


FIGURE 1

Pour les valeurs données à K , les vitesses critiques de flottement s'obtiennent pour

$$\frac{C_D}{2\pi} = 0,0117$$

et

$$\frac{C_D}{2\pi} = 0,003719$$

de sorte que les vitesses critiques de flottement qui correspondront, seront :

$$v_F = 8,6617 b \omega_\alpha \quad \text{pour } \frac{C_D}{2\pi} = 0,003719$$

$$v_F = 6,0442 b \omega_\alpha \quad \text{pour } \frac{C_D}{2\pi} = 0,0117$$

Du calcul ci-dessus, on remarque la grande sensibilité pour la situation de stabilité ainsi que pour la valeur des vitesses critiques de flottement à la résistance à l'avancement.

TABLEAU 1

$S=0; \alpha=-0,5; m=0,1; i_\alpha=0,2; \rho=0$		
$1/K$	$C_D/2\pi$	$Z = (1+ig) \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}$
16,67	0,0000	2,0339 (1-1,4754 i)
	0,0025	2,8739 (1-1,0532 i)
	0,0050	3,9301 (1-0,5918 i)
	0,0100	5,8661 (1-0,1893 i)
	0,0117	7,610
	20,0	0,00000
	0,00125	3,0405 (1-0,8881 i)
	0,00250	4,2030 (1-0,3158 i)
	0,0037178	5,3326
	0,00500	6,5143 (1+0,2170 i)
	0,01000	11,1453 (1+0,6167 i)

Pour le calcul des vitesses critiques de flottement dans le cas l'existence des couplages massiques et aérodynamiques, le calcul se fera en partant aussi du système d'équation de mouvement. En prenant, par exemple

$$S=0,01; \alpha=-0,45; m=0,1$$

et $i_\alpha=0,2$, en considérant $\rho=0$ les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 2 et la diagramme de la figure 2,

et pour le même cas où l'on considère $\rho = 0,1$, les résultats sont donnés dans

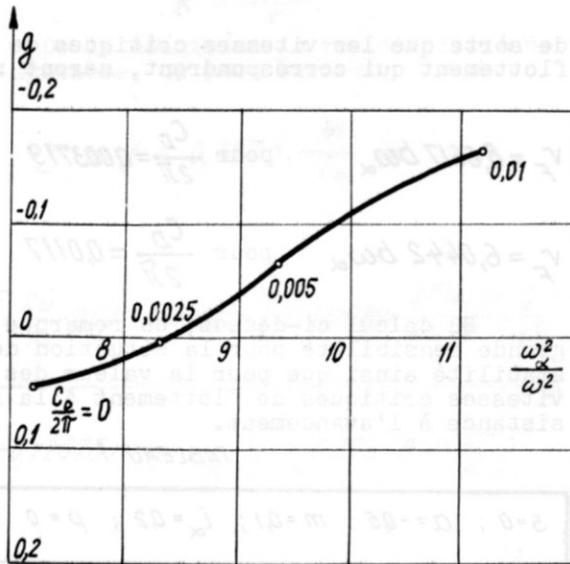


FIGURE 2

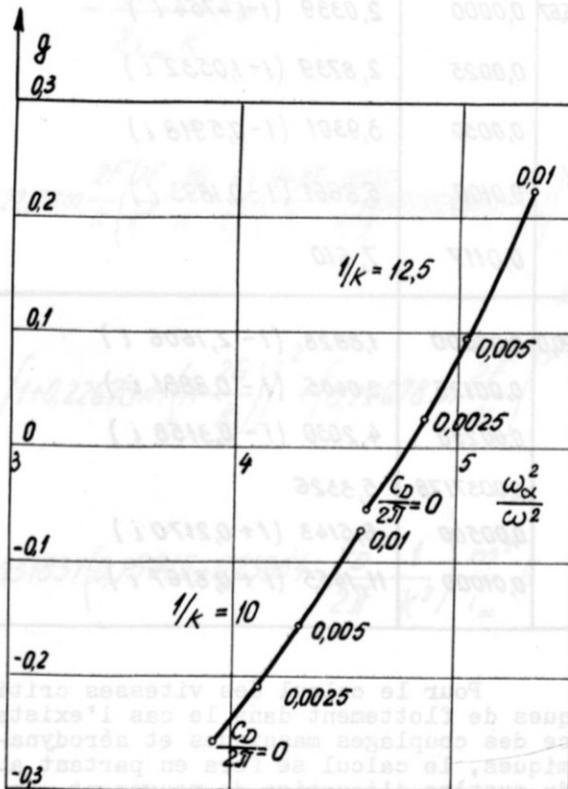


FIGURE 3

le tableau 3 et les diagrammes de la fi-

gure 3. Pour ce dernier cas, en considérant

TABLEAU 2

$s=0,01; a=0,45; m=0,1; i_\alpha=0,2; \rho=0$		
$1/k$	$C_D/2\pi$	$Z = (1+ig) \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}$
16,67	0,0000	7,2383 (1 - 0,0477 i)
	0,0025	8,3329 (1 - 0,0014 i)
	0,0050	9,3406 (1 + 0,0674 i)
	0,0100	11,2613 (1 + 0,1644 i)

TABLEAU 3

$s=0,01; a=0,45; m=0,1; i_\alpha=0,2; \rho=0,1$		
$1/k$	$C_D/2\pi$	$Z = (1+ig) \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}$
10	0,0000	3,9360 (1 - 0,2594 i)
	0,0025	4,1177 (1 - 0,2101 i)
	0,0050	4,2909 (1 - 0,1610 i)
	0,0100	4,5804 (1 - 0,0703 i)
12,5	0,0000	4,6077 (1 - 0,0566 i)
	0,0025	4,8414 (1 + 0,0225 i)
	0,0050	5,0274 (1 + 0,0949 i)
	0,0100	5,3374 (1 + 0,2218 i)

TABLEAU 4

$C_D/2\pi$	v_F
0,0025	5,6115 $b \omega_\alpha$
0,0050	5,3063 $b \omega_\alpha$
0,0100	4,8586 $b \omega_\alpha$

une interpolation linéaire, les vitesses

critiques de flottement, en fonction de la résistance à l'avancement, sont donnés dans le tableau 4.

Pour conclure, on observe, tout particulièrement pour de grandes valeurs du rapport $v/b\omega$, que l'effet de la résistance à l'avancement sur la vitesse critique de flottement, est loin d'être négligeable, même pour de petites valeurs du coefficient $\frac{C_D}{2\eta}$.

Bibliographie

1. A.Petre, Teoria elasticității - Statica, București, Ed.Academiei R.S.Romania, 1966.
2. Bisplinghoff R.L., H.Assley, R.L.Halfman, Aeroelasticity, Cambridge Mass. Addison - Wesley Publishing Comp., 1955.
3. R.H.Scanlan, R.Rosenbaum, Introduction to the study of Aircraft Vibration and Flutter, Macmillan Comp. New - York, 1951.